1 மெய்யெண்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- எண் தொடைகளை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- சேடுகளைப் பயன்படுத்திக் கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

1.1 எண்களை வகைப்படுத்தல்

இற்றைக்கு 3 0000 ஆண்டுகளுக்கு முன்னர் மனித இனத்தில் எண்கள் பற்றிய எண்ணக் கரு உருவாகியதாக நம்பப்படுகின்றது. பல்வேறு நாகரிகங்களில் சுயாதீனமாக உருவாகி வளர்ந்த இவ்வெண்ணக்கரு முழு உலகிலும் விருத்தியடைந்து இன்று கணிதம் என்னும் உலகளாவிய பாடத்துறையாக மாறியுள்ளது.

தொடக்கத்தில் நாகரிகத்தில் எண்களை எண்ணுதல், கணக்கு வைத்தல் போன்ற எளிய பணிகளுக்கு எண்கள் பயன்படுத்தப்பட்டனவென நாம் கருதலாம். தொடக்கத்தில் உருவாகிய ''ஒன்று'' என்னும் எண்ரீதியான எண்ணக்கரு தொடர்ச்சியாக ''இரண்டு'' ஆக மாறிப் பின்னர் ''மூன்று'', ''நான்கு'' என வளர்ந்தது. இவ்வாறு மக்கள் தங்களுக்கு விருப்பமான அளவைப் பெயரிட முடிந்ததெனப் பிற்காலத்தில் விளங்கிக் கொள்ளப்பட்டது. இவ்வாறு பெயரிடுவதற்குப் பல்வேறு நாகரிகங்களில் பல்வேறு குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்பட்டன.

வரலாற்றுரீதியான சான்றுகளுக்கேற்ப இன்று நாம் பயன்படுத்தும் 1, 2, 3 போன்ற எண்கள் குறிக்கும் இலக்கங்கள் இந்தியாவில் பயன்படுத்த ஆரம்பிக்கப்பட்டனவென ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது. அது மாத்திரமன்று பூச்சியம் என்னும் எண்ணக்கருவை ஓர் எண்ணாகப் பயன்படுத்திய பெருமையும் இடப் பெறுமானத்தை அடிப்படையாகக் கொண்ட ஓர் எண் முறைமையை உருவாக்கிய பெருமையும் இந்தியாவிற்கு உரியனவாகும். இந்த எண் முறைமை இந்து அராபிய எண் முறைமையாக அழைக்கப்பட்ட அதே வேளை அதன் பயன்பாடு வர்த்தக மார்க்கமாக மத்திய கிழக்கிற்கும் அங்கிருந்து ஐரோப்பாவிற்கும் பரவியதாக நம்பப்படுகின்றது. இன்று இந்த எண் முறைமை நியமப் பொது எண் முறைமை என முழு உலகினாலும் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

எண் பயன்பாடு தொடர்பாக மனிதப் பரிணாமத்தில் ஏற்பட்ட ஒரு பெரும் புரட்சியாக எண்களைப் பயன்படுத்தி அடிப்படைக் கணிதச் செய்கைகளை (கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல்) செய்தலைக் காட்டலாம். இன்றைய தொழினுட்ப உலகில் எண்களும் அவற்றின் மீது செய்யும் கணிதச் செய்கைகளும் இல்லாமல் மனித நிலைத்திருக்கை பற்றிச் சிந்தித்துப் பார்க்க முடியாது.

மனிதத் தேவைகளுக்காக முதலில் பயன்படுத்தப்பட்ட எண்களாக 1, 2, 3, ... ஆகிய வற்றைக் காட்டலாமெனினும் பிற்காலத்தில் பூச்சியம், பின்ன எண்கள், மறை எண்கள் ஆகியன அவற்றுடன் சேர்க்கப்பட்டன. கணிதம் ஒரு தனிப் பாடமாக மேம்பட்ட காலத்தில் வேறு பல்வகை எண்கள் பற்றிக் கணிதவியலாளர்களின் கவனம் சென்றது. இப்பாடத்தில் நாம் அத்தகைய பல்வேறு எண் தொடைகள் பற்றியும் அவற்றின் குறிப்பீட்டு முறைமைகளும் பண்புகளும் பற்றியும் கற்கவுள்ளோம்.

நிறைவெண் தொடை ($\mathbb{Z}$)

இயற்கையாக நாம் முதலில் 1, 2, 3, ... என இளம் பிராயத்தில் கற்ற எண்களை இனங்காண்கின்றோம். இவ்வெண்கள் **எண்ணும் எண்கள்** எனப்படும் அதே வேளை அவை எல்லாம் அடங்கும் தொடை, தொடைக் குறிப்பீட்டில் பின்வருமாறு எழுதப்படும்.

$$\{1, 2, 3, ...\}$$

எண்ணும் எண்கள் என்னும் பெயர் கிடைப்பதற்கான காரணம் மிகத் தெளிவாகும். எனினும் கணிதப் பிரயோகத்தில் இப்பெயர் அரிதாகவே பயன்படுத்தப்படுகின்றது. இத்தொடைக்குப் பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படும் பெயர் நேர் நிறைவெண் தொடை என்பதாகும். அத்தொடை $\mathbb{Z}^+$ இனால் குறிப்பிடப்படும்.

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$$

இதற்கேற்ப 1, 2, 3, ... ஆகிய எண்கள் நேர் நிறைவெண்கள் எனப்படும்.

–1, –2, –3, ... ஆகிய எண்கள் மறை முழு எண்களாக வரையறுக்கப்படுகின்றன. இத்தொடையைக் குறிப்பிடுவதற்கு பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு குறியீடு இல்லாவிட்டாலும் சில கணிதவியலாளர்கள் தமது பாடத்துறையின் தேவைகளுக்கேற்ப அதற்காக $\mathbb{Z}^-$ என்னும் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகின்றனர்.

நிறைவெண்களாக நேர் நிறைவெண்கள், பூச்சியம், மறை நிறைவெண்கள் ஆகிய எல்லா எண்களும் கருதப்படுகின்றன. அத்தொடை $\mathbb{Z}$ இன் மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்றது. அதற்கேற்ப

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

என அல்லது

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$$

எனக் குறிப்பிடப்படும்.

இயற்கை எண் தொடை ($\mathbb{N}$)

அடுத்ததாக நாம் 1, 2, ... என்றவாறான எண் தொடையை இனங்காண்கின்றோம். அதாவது நேர் நிறைவெண் தொடையாகும். இந்த எண் தொடை இயற்கை எண் தொடை எனப்படும் அதே வேளை அது $\mathbb{N}$ இன் மூலம் குறிப்பிடப்படும். அதாவது

$$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$$

குறிப்பு : எவ்வெண்கள் இயற்கை எண்களாகக் கருதப்படுகின்றன என்பது பற்றிக் கணிதவியலாளர்களிடையே பொது உடன்பாடு இல்லை. முற்காலத்தில் 1, 2, 3, ... ஆகிய நேர் நிறைவெண்களே இயற்கை எண்களாக அழைக்கப்படுகின்றன. அப்பெயர் பொருத்தமானதாகத் தெரிகின்றது. எனினும் அண்மைக் காலத்தில் (20 ஆம் நூற்றாண்டில்) வாழ்ந்த சில சிரேஸ்ட கணிதவியலாளர்கள் (விசேடமாக, தொடைக் கொள்கை பற்றிய நிபுணர்கள்) தமது நூல்களில் குறித்த சாதாரண காரணங்களுக்காக 0 ஐயும் ஓர் இயற்கை எண்ணாகக் கருதினர். பூச்சியமும் நேர் நிறைவெண்களும் இடம்பெறும் தொடையைக் குறிப்பதற்கு அப்போது ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட ஒரு பெயரும் குறிப்பீடும் இராமை அதற்குக் காரணமாக இருக்கலாம். இருப்பினும் எண் கொள்கை தொடர்பான பெரும்பாலான நூல்களில் இயற்கை எண்களின் தொடை {1, 2, 3 ...} எனக் கருதப்படுகின்றது. இன்று எழுதப்படும் எல்லா நூல்களிலும் நூலாசிரியர்கள் தாம் கருதும் இயற்கை எண்கள் யாவையென முதலில் குறிப்பிடுகின்றனர்.

விகிதமுறும் எண் தொடை ($\mathbb{Q}$)

நிறைவெண்களைப் போன்று பின்னங்களையும் எண்களாகக் கருதலாம் எனவும் பின்னங்களுக்கும் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகளைச் செய்யலாம் எனவும் நாம் கண்டோம். ஒவ்வொரு நிறைவெண்ணையும் பின்ன எண்ணாக எழுதலாம் (ஓர் உதாரணமாக $2 = \frac{2}{1}$ என எழுதலாம்). அவ்வாறே ஒரே எண் பெறுமானத்தைக் கொண்ட ஒரு பின்னத்தை வேறு விதத்தில் எழுதலாம் (ஓர் உதாரணமாக $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$). மறைப் பின்னங்களையும் நாம் கண்டுள்ளோம் ($-\frac{2}{5}$, $-\frac{-11}{3}$ ஆகியன). நாம் பொதுவாக ஒரு பின்ன எண்ணின் பகுதியிலும் தொகுதியிலும் நிறைவெண்கள் இருக்க வேண்டும் எனக் கருதியிருந்தாலும் அது அவ்வாறன்று. ஓர் உதாரணமாக $\frac{3}{\sqrt{2}}$ என்பதுவும் ஒரு பின்ன எண்ணாகும். ஆனால், பகுதியிலும் தொகுதியிலும் நிறைவெண்கள் உள்ள பின்னங்கள் (பகுதியில் 0 இல்லாதபோது) கணிதத்தில் விசேட முக்கியத்துவம் வாய்ந்தனவாக இருக்கும் அதே வேளை அவ்வெண்கள் **விகிதமுறும் எண்கள்** எனப்படும். அத்தொடைகள் $\mathbb{Q}$ வினால் குறிக்கப்படும். இதற்கேற்பப் பிறப்பிக்கும் தொடை முறையைப் பயன்படுத்தி விகிதமுறும் எண் தொடையைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

விகிதமுறும் எண் தொடையை வரையறுக்கத்தக்க வேறு விதங்களும் உள்ளன. அவற்றில் ஒரு விதம்

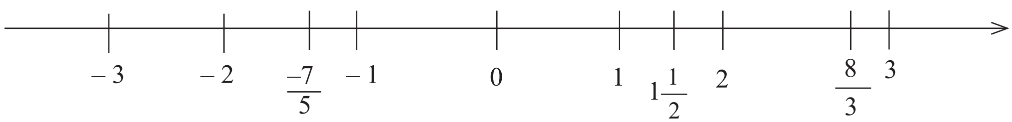
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^{+} \right\}.$$

இவ்விரு வரைவிலக்கணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று சமவலுவானவை என்பதை நன்றாக அவதானிக்க (ஒரு விகிதமுறும் எண்ணின் பகுதியில் 0 இருக்க முடியாமையாலும் மறை விகிதமுறும் எண்கள் எல்லாம் தொகுதியின் மறை நிறைவெண்களிலிருந்து கிடைக்கின்றமையாலும் இரண்டாம் வரைவிலக்கணத்திலிருந்தும் எல்லா விகிதமுறும் எண்களும் கிடைக்கின்றன).

விகிதமுறா எண்களின் தொடை ($\mathbb{Q}'$)

இப்போது விகிதமுறா எண்களின் தொடையை இனங்காண்பதற்கு மிகவும் உகந்த தருணமாகும்.நாம் இதற்கு முன்னைய தரங்களில் ஓர் எண் கோட்டினை வரைந்து எண்கள் பற்றிக் கற்ற விதத்தை நினைவுகூர்வோம்.

அதனைப் பற்றி மீண்டும் ஆராய்வோம். இரு பக்கங்களுக்கும் தேவையான அளவுக்கு நீட்டப்படத்தக்க ஒரு நேர்கோட்டைக் கருதுவோம். அக்கோட்டின் மீது ஒரு விருப்பமான புள்ளியை 0 எனப் பெயரிடுவோம். 0 வின் ஒரு பக்கத்தில் (வழமையாக வலது பக்கத்தில்) சம தூரங்களில் 1, 2, 3, ... என்னும் நேர் நிறைவெண்களும் மற்றைய பக்கத்தில் –1, –2, –3, ... என்னும் மறை நிறைவெண்களும் குறிக்கப்பட்டுள்ளனவெனக் கொள்வோம். இதற்கேற்ப எல்லா நிறைவெண்களும் இக்கோட்டின் மீது காட்டப்பட்டுள்ளனவெனக் கொள்வோம். அதன் பின்னர் எல்லா விகிதமுறும் எண்களும் இக்கோட்டின் மீது காட்டப்பட்டுள்ளனவெனக் கொள்வோம். அவ்வாறு குறித்த சில புள்ளிகள் பின்வரும் உருவில் காணப்படுகின்றன.



இப்போது இக்கோட்டின் மீது எல்லா விகிதமுறும் எண்களும் (நிறைவெண்களும் உட்பட) குறிக்கப்பட்டு முடிந்துள்ளனவெனக் கொள்வோம். அப்போது நேர்கோடு மீது எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் ஒத்த ஓர் எண் குறிக்கப்படுகின்றதென நீங்கள் நினைக்கின்றீர்களா? வேறொரு விதத்தில் கேட்டால், கோடு வழியே 0 இலிருந்து உள்ள ஒவ்வொரு தூரத்தையும் ஒரு விகிதமுறும் எண்ணாக எழுதலாமென நீங்கள் நினைக்கின்றீர்களா? உண்மையில் வேறு புள்ளிகள் குறிப்பிடாமல் எஞ்சியிருக்கின்றன. அதாவது ஒரு விகிதமுறும் எண்ணினால் வகைகுறிக்கப்படாத புள்ளிகளும் (எண்கள்)

இக்கோட்டின் மீது எஞ்சியுள்ளன. இவ்வாறு வகைகுறிக்கப்படாமல் எஞ்சியிருப்பவை $\frac{a}{b}$ (இங்கு a, b நிறைவெண்களாகும்). என்ற வடிவில் **எழுதமுடியாத** புள்ளிகள் என்பது தெளிவாகின்றது. இவ்வாறு வகைகுறிக்கப்படாமல் எஞ்சியிருக்கும் புள்ளிகள் (எண்கள்) **விகிதமுறா** எண்கள் எனப்படும்.

விகிதமுறா எண் தொடையை வகைகுறிப்பதற்கு வேறொரு குறியீடு இல்லாத அதே வேளை அது $\mathbb{Q}$ வின் நிரப்பித் தொடை என்பதால் $\mathbb{Q}'$ இனால் காட்டப்படும்.

விகிதமுறா எண்களுக்கு உதாரணங்களாக $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ஆகிய எண்களைக் காட்டலாம். உண்மையில் ஒரு நிறைவர்க்க எண் இல்லாத எந்த ஒரு நிறைவெண்ணினதும் வர்க்க மூலம் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும். இதனைத் தவிர யாதாயினும் ஒரு வட்டத்தின் பரிதி அதன் விட்டத்துடன் கொண்டுள்ள விகிதம் π என்பதும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும். கணிப்பதன் வசதிக்காக π யின் அண்ணளவுப் பெறுமானமாக $\frac{22}{7}$ என எடுக்கப்படுகின்றது.

மெய்யெண் தொடை ($\mathbb{R}$)

மேலேயுள்ள கலந்துரையாடலின்படி ஓர் எண் கோட்டின் மீதுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் விகிதமுறு எண்களாக அல்லது விகிதமுறா எண்களாகக் குறிக்கலாம். இவ்விகிதமுறு, விகிதமுறா எண்கள் யாவற்றையும் அதாவது எண்கோட்டின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள் (எண்கள்) அனைத்தும் பொதுவாக **மெய்யெண்கள்** என அழைக்கப்படும். இம்மெய்யெண்களின் தொடை $\mathbb{R}$ இனால் குறிக்கப்படும்.

எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பு

எந்தவொரு மெய்யெண்ணையும் தசம வகைக்குறிப்பாகக் காட்டலாம். முதலில் ஓர் உதாரணமாகச் சில விகிதமுறும் எண்களின் தசம வகைக்குறிப்பைப் பார்ப்போம்.

1. விகிதமுறும் எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பு

$$4 = 4.000\ldots$$

$$\frac{1}{2} = 0.5 = 0.5000\ldots$$

$$\frac{11}{8} = 1.375 = 1.375000\ldots$$

$$\frac{211}{99} = 2.131313\ldots$$

$$\frac{767}{150} = 5.11333\ldots$$

$$\frac{37}{7} = 5.285714285714285714\ldots$$

இத்தசம வகைக்குறிப்புகளுக்கு உள்ள ஒரு பொது இயல்பு தசமப் புள்ளியின் ஒரு குறித்த சந்தர்ப்பத்திற்குப் பின்னர் (அல்லது முதலில்) ஓர் எண் குறித் (Numeral) தொகுதி (அல்லது ஓர் எண் குறிக்கும் இலக்கம்) மீண்டும் மீண்டும் மீளுதலாகும். மீளுதல் எனப்படுவது சம இடைவெளியில் மீண்டும் மீண்டும் எழுதுவது என்பதாகும். ஓர் உதாரணமாக $\frac{1}{2}$ இன் தசம வகைக்குறிப்பில் எண் குறி இலக்கம் 0 ஆனது இரண்டாம் தசம தானத்திலிருந்து மீளுகின்றது. 4 இன் எண் குறி இலக்கம் 0 தொடக்கத்திலிருந்து மீளுகின்றது. $\frac{211}{99}$ இல் எண் குறிக்கும் இலக்கங்கனின் தொகுதி 13 ஆனது தொடக்கத்திலிருந்து மீளுகின்றது. $\frac{37}{7}$ இல் எண் குறிக்கும் இலக்கத் தொகுதி 285714 தொடக்கத்திலிருந்து மீளுகின்றது. இவ்வியல்பு, அதாவது ஒரு குறித்த எண் குறிக்கும் இலக்கத் தொகுதி தொடர்ச்சியாக மீளுதல் ஒவ்வொரு விகிதமுறும் எண்ணுக்கும் பொதுவான இயல்பாகும். இவ்வாறு மீளும் பகுதி 0 எனின் அத்தகைய தசமம் **முடிவுறு தசமம்** (Finite decimal) எனப்படும். அதே வேளை அவ்வாறு இராவிட்டால் அவை **மடங்கு** (Recurring /மீளும்) **தசமம்** எனப்படும். இதற்கேற்ப குறித்த உதாரணத்தில் $\frac{1}{2}$, 4, $\frac{11}{8}$ ஆகியன முடிவுறு தசமங்களாக இருக்கும் அதே வேளை மற்றைய எல்லாம் மடங்கு தசமங்களாகும். இதற்கேற்ப நாம் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

ஒவ்வொரு விகிதமுறும் எண்ணையும் முடிவுறு தசமமாக அல்லது மடங்கு தசமமாக எழுதலாம்.

விகிதமுறும் எண்கள் பற்றிய ஓர் அபூர்வ பேறைப்பற்றிக் கற்போம். ஒரு குறித்த விகிதமுறும் எண்ணின் தசமத்தை வகைகுறிக்கும் முடிவுறு தசமம் பற்றிச் சிந்திப்போம். $\frac{a}{b}$ என்னும் விகிதமுறும் எண்ணில் தசம வகைக்குறிப்பு முடிவுறு தசமம் எனவும் a, b ஆகியவற்றில் பொதுக் காரணிகள் இல்லையெனவும் கொள்வோம். அப்போது பகுதியில் (அதாவது b யில்) 2 அல்லது 5 (அல்லது 2, 5 ஆகிய இரண்டும்) இன் வலுக்கள் மாத்திரம் காரணிகளாக உள்ளன. ஒரு மடங்கு தசமமாகிய ஒரு விகிதமுறும் எண்ணின் 2, 5 ஆகியன தவிர்ந்த வேறொரு முதன்மை எண் பகுதியில் ஒரு காரணியாக இருத்தல் வேண்டும்.

மடங்கு தசமங்களை எழுதும்போது பின்வரும் குறியீட்டு முறைக்கேற்ப எழுதப்படும்.

மடங்கு தசமம்	சுருக்கிக் காட்டல்
12.4444...	$12.\dot{4}$
2.131313...	$2.\dot{1}\dot{3}$
5.11333...	$5.11\dot{3}$
5.285714285714285714...	$5.\dot{2}8571\dot{4}$

பயிற்சி 1.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள விகிதமுறும் எண்களின் ஒவ்வோர் எண்ணும் முடிவுறு தசமமா, மடங்கு தசமமா என வகுக்காமல் குறிப்பிடுக. மடங்கு தசமமாக இருக்கும் பின்னங்களைத் தசம வடிவத்தில் காட்டி சுருக்கி எழுதுக.

a. $\frac{3}{4}$ **b**. $\frac{5}{5}$ **c**. $\frac{3}{7}$ **d**. $\frac{5}{9}$ **e**. $\frac{5}{21}$ **f**. $\frac{7}{32}$

g. $\frac{19}{33}$ **h**. $\frac{13}{50}$ **i**. $\frac{7}{64}$ **j**. $\frac{5}{84}$ **k**. $\frac{15}{128}$ **l**. $\frac{41}{360}$

2. விகிதமுறா எண்ணொன்றின் தசம வகைக்குறிப்பு

இப்போது நாம் ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பைப் பார்ப்போம். ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பில் எவ்வித எண் குறிக்கும் இலக்கத் தொகுதியின் மீளுதல் நடைபெறுவதில்லை. ஓர் உதாரணமாக $\sqrt{2}$ இன் பெறுமானத்தை 60 தசம தானங்கள் வரைக்கும் கணிக்கும்போது இவ்வாறு கிடைக்கும்.

1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679...

நாம் நிதமும் சந்திக்கும் ஓர் எண்ணாகிய π யும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும். π யின் பெறுமானம் 60 தசமதானங்கள் வரைக்கும் கணிக்கப்படும்போது பின்வருமாறாகும்.

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944...

விகிதமுறா எண்கள் பற்றிப் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

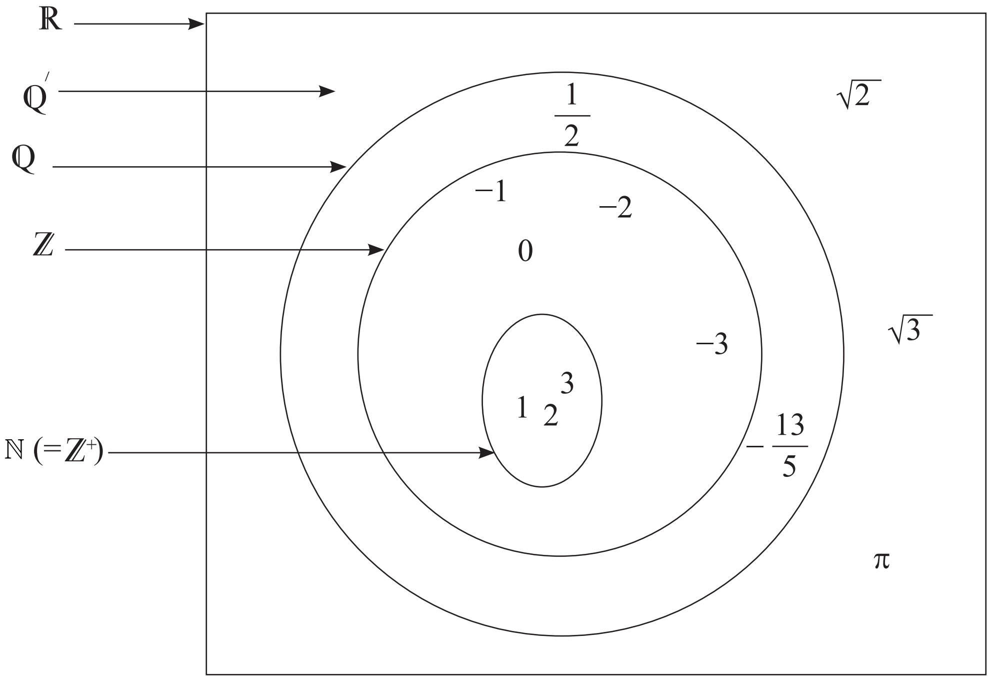
ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பில் மீளும் எண் குறிக்கும் இலக்கத் தொகுதி இல்லை. அதற்கேற்ப மடங்கு தசமம் அல்லாத முடிவில் தசம எண்கள் விகிதமுறா எண்களாகும்.

குறிப்பு : விகிதமுறா எண்களின் தசம வகைக்குறிப்புப் பற்றி விவரிக்கும்போது ஏற்படும் ஒரு பொது வழு ''ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பில் எவ்விதக் கோலமும் இல்லாமை'' ஆகும். ''கோலம்'' என்னும் சொல் கணிதத்தில் நன்றாக வரையறுக்கப்படாமை இங்கு உள்ள பிரச்சினையாகும். ஓர் உதாரணமாகக் கீழே எழுதப்பட்டுள்ள தசம எண்ணுக்கு ஒரு தெளிவான கோலம் உண்டு.

0.101001000100001000001...

எனினும் அது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும். இதில் எந்த ஒரு தசமப் பகுதியும் மீளவில்லை.

இதுவரைக்கும் கற்ற எண் தொடைகள் எல்லாவற்றையும் மெய்யெண் தொடையாகவும் அதனை அகிலத் தொடையாகக் கொண்டு மற்றைய எண் தொடைகளை அதன் தொடைப்பிரிவுகளாகப் பின்வருமாறு ஒரு வென் வரிப்படத்தில் காட்டலாம். விளங்கிக் கொள்வதன் வசதிக்காகச் சில தொடைப்பிரிவுகளில் இருக்க வேண்டிய சில மூலகங்கள் வீதமும் எழுதப்பட்டுள்ளன.



பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் மெய்யெண்களை விகிதமுறும் எண்களாகவும் விகிதமுறா எண்களாகவும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

   a. $\sqrt{2}$ **b.** $\sqrt{25}$ **c.** $\sqrt{6}$ **d.** $\sqrt{11}$ **e.** 6.52

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள கூற்றுகள் சரியானவையா, தவறானவையா எனத் தீர்மானிக்குக.

   (a) எந்தவொரு மெய்யெண்ணும் முடிவுறு தசமம் அல்லது முடிவில் தசமம் ஆகும்.

   (b) முடிவில் தசமத்தில் விகிதமுறும் எண்களும் இருக்கலாம்.

   (c) எந்தவொரு மெய்யெண்ணும் மடங்கு தசமம் அல்லது முடிவில் தசமம் ஆகும்.

   (d) 0.010110111011110... என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

1.2 சேடுகள்

கணிதத்தில் மூலக் குறியாக அழைக்கப்படும் " $\sqrt{\ }$ " ஐப் பயன்படுத்தி எண் (அத்துடன் அட்சரகணிதக்) கோவைகளைக் காட்டிய விதம் உங்கள் நினைவில் இருக்கும் என்பதில் சந்தேகமில்லை. ஓர் உதாரணமாக $\sqrt{4}$ ஆனது " 4 இன் நேர் வர்க்கமூலம்" என அழைக்கப்படும் அதே வேளை வர்க்கிக்கும்போது 4 கிடைக்கும். நேர் எண் அதாவது 2 அதன் மூலம் காட்டப்படுகின்றது.எந்த ஒரு நேர் நிறைவெண் x இன் வர்க்கமூலமாகிய $\sqrt{x}$ உம் ஒரு நேர் நிறைவெண்ணாக இருப்பின் அப்போது $\sqrt{x}$ ஆனது நிறை வர்க்கமூலம் எனப்படும். இதற்கேற்ப $\sqrt{4}$ ஆனது நிறை வர்க்கமூலமாகும். எனினும் $\sqrt{2}$ ஒரு நிறை வர்க்க மூலமன்று எனவும் அது அண்ணளவாக 1.414 எனவும் நாம் இதற்கு முன்னர் பார்த்தோம். மேலும் $\sqrt{2}$ ஆனது ஒரு விகிதமுறா எண் எனவும் நாம் இப்பாடத்தில் கற்றோம். இந்த "$\sqrt{\ }$" குறி இடப்பட்ட ஆனால் நிறை வர்க்கமூலம் இல்லாத கோவைகள் **சேடுகள்** எனப்படும்.

உண்மையில் "$\sqrt{\ }$" இட்டுக்கொண்டு வர்க்கமூலம் தவிர்ந்த வேறெந்த மூலத்தையும் காட்டலாம். உதாரணமாக $\sqrt[3]{2}$ ஆனது 2 இன் மூன்றாம் மூலத்திற்கு நேர் எண் காட்டப்படுகின்றது. அது 2 இன் கன (முப்படி) மூலம் எனப்படும். அது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாக இருக்கும் அதே வேளை அதன் பெறுமானம் அண்ணளவாக 1.2599 ஆகும். (1.2599^3 இன் பெறுமானத்தைக் காண்பதன் மூலம் நீங்கள் இதனை நிறுவலாம்). இவ்வாறே 2 இன் நான்காம் மூலம், 2 இன் ஐந்தாம் மூலம் ஆகியவற்றையும் வரையறுக்கலாம் (உதாரணமாக $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{8.24}$) இத்தகைய கோவைகளும் சேடுகளாகும். எனினும் நாம் இப்பாடத்தில் நேர் நிறைவெண்களின் வர்க்கமூலங்கள் உள்ள சேடுகளை மாத்திரம் கருதுவோம்.

நிறை வர்க்கம் அல்லாத ஓர் எண்ணின் வர்க்க மூலம் முடிவுறு தசமம் அல்லது மடங்கு தசமம் அன்று. அதற்கேற்ப சேடுகள் விகிதமுறா எண்கள் என்பதை அவதானிக்க.

நாம் இங்கு விசேடமாகச் சேடு வடிவத்தில் உள்ள கோவைகளைச் சுருக்குதல் பற்றிக் கருதுகிறோம். இத்தகைய சுருக்கல்கள் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தனவாக இருப்பதற்குப் பல காரணங்கள் உள்ளன. ஒரு காரணமாகக் கணிப்பை எளிதாக்கலைக் காட்டலாம். ஓர் உதாரணமாக $\frac{1}{\sqrt{2}}$ இன் பெறுமானத்தைக் காணவேண்டியுள்ளபோது $\sqrt{2}$ இதற்காக 1.414 ஐ இட்டால் $\frac{1}{1.414}$ இன் பெறுமானத்தைக் காணலாம். இவ்வகுத்தல் ஓரளவு நீண்டது. ஆனால் பின்வருமாறு சுருக்கிக் கணித்தல் மிகவும் எளிதானது.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$ (பின்னத்தில் பகுதியையும் தொகுதியையும் $\sqrt{2}$ இனால் பெருக்கும்போது)

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{1.414}{2} = 0.707.$$

மேலும் ஒரு காரணமாக, கணிக்கும்போது எழும் வழுவை இழிவளவாக்குவதாகக் காட்டலாம். அதற்காக ஓர் உதாரணமாக, $\frac{\sqrt{20}}{2} - \sqrt{5}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம். இங்கு $\sqrt{20}$ இன் கிட்டிய பெறுமானமாக 4.5 ஐயும் $\sqrt{5}$ இன் கிட்டிய பெறுமானமாக 2.2 ஐயும் கொள்வோம். அப்போது

$$\frac{\sqrt{20}}{2} - \sqrt{5} = \frac{4.5}{2} - 2.2 = 2.25 - 2.2$$
$$= 0.05$$

எனினும் இக்கோவையில் உண்மைப் பெறுமானம் 0 ஆகும். இவ்வாறு வேறு விடை கிடைப்பதற்கு ஒரு காரணம் $\sqrt{20}$, $\sqrt{5}$ இற்கு ஒரு அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைப் பயன்படுத்துகின்றமையாகும். ஆனால், தரப்பட்டுள்ள கோவையை வேறு விதத்தில் சுருக்குதன் மூலம் சரியான பெறுமானமாகிய 0 ஐப் பெறலாம்.

$\sqrt{20}$ என்னும் வடிவத்தில் உள்ள சேட்டில் இருக்கும் சிறப்பியல்பு முழு எண்ணும் வர்க்கமூலக் குறியில் இருத்தலாகும். அத்தகைய சேடுகள் **முழுமைச் சேடு** எனப்படும்.

$6\sqrt{15}$ என எழுதும்போது $6 \times \sqrt{15}$ எனக் கருதப்படுகின்றது. அது ஒரு சேட்டினதும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணினதும் (1 இற்குச் சமமற்றது) பெருக்கமாகும்.

ஒரு சேடு $a\sqrt{b}$ வடிவத்தில் எழுதப்படும்போது மிக எளிய வடிவத்தில் இருப்பதாகக் கூறப்படும். இங்கு a ஆனது ஒரு விகிதமுறும் எண்ணாக இருக்கும் அதே வேளை b யின் காரணிகளாக ஒரு நிறை வர்க்கம் இருக்கக்கூடாது. ஓர் உதாரணமாக $6\sqrt{15}$ ஆனது மிக எளிய வடிவத்தில் உள்ள ஒரு சேடாக இருக்கும் அதே வேளை $5\sqrt{12}$ மிக எளிய வடிவத்தில் இல்லை. அதற்குக் காரணம் 12 இன் ஒரு காரணியாக ஒரு நிறை வர்க்கமான 4 இருத்தலாகும்.

முதலில் சுட்டிகள் பற்றிய இயல்புகளைப் பயன்படுத்திச் சேடுகள் உள்ள கோவைகள் சுருக்கப்படும் விதத்தை உதாரணங்களின் மூலம் கருதுவோம்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $3\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$
இங்கு $\sqrt{5}$ என்பதை ஒரு தெரியாக் கணியமாக எண்ணிச் சுருக்கலாம்.

எனவே $3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$.

இது $3x + 6x = 9x$ எனச் சுருக்குவது போன்றதாகும். இத்தகைய சேடு வடிவில் மேலும் சுருக்க முடியாது என்பதை அவதானிக்க. $\sqrt{5}$ இற்குக் கிட்டிய ஒரு பெறுமானத்தை இட்டுச் சுருக்குவது சேடு வடிவில் சுருக்குதல் அல்ல என்பதை நினைவில் கொள்க.

நினைவில் கொள்ளவேண்டிய இன்னுமொரு முக்கிய விடயமானது, $3\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$ போன்ற கோவைகளை (சேடுகளை) மேலும் சுருக்க முடியாது என்பதாகும்.

இனிச் சுட்டி பற்றிய பண்புகளைப் பயன்படுத்திச் சேடுகளைக் கொண்ட கோவைகளைச் சுருக்குவதை உதாரணங்களின் மூலம் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 2

$\sqrt{20}$ என்னும் சேடை எளிய வடிவில் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5}$

$= \sqrt{4} \times \sqrt{5}$ ($\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ என்பதால்)

$= 2 \times \sqrt{5}$

$= 2\sqrt{5}$

உதாரணம் 3

$4\sqrt{5}$ என்னும் சேடை முழுமைச் சேடாகப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$4\sqrt{5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5}$ ($4 = \sqrt{16}$ என்பதால்)

$= \sqrt{16 \times 5}$

$= \sqrt{80}$

சேடுகளைப் பெருக்கும் முறையையும் வகுக்கும் முறையையும் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 4

$5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2}$

பெருக்கும்போது விகிதமுறு எண்களையும் விகிதமுறா எண்களையும் வெவ்வேறாகப் பெருக்குவோம்.

$$5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = 5 \times 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$
$$= 20 \times \sqrt{3 \times 2}$$
$$= 20\sqrt{6}$$

உதாரணம் 5

$3\sqrt{20} \div 2\sqrt{5}$

$3\sqrt{20}$ முழுமைச் சேடாகும். அதனை $3\sqrt{4 \times 5}$ என எழுதலாம்.

மேலும் சுருக்கி $3 \times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ எனக் காட்டலாம்.

அப்போது

$$3\sqrt{20} \div 2\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{20}}{2\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$
$$= 3$$

இனி நாம் $\frac{a}{\sqrt{b}}$ என்ற வடிவிலான கோவைகளைச் சுருக்கும் முறை பற்றி ஆராய்வோம். இவ்வாறான பின்னங்களாக $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ஆகியவற்றைக் குறிப்பிடலாம். இவ்வொவ்வொரு பின்னத்திலும் பகுதியில் வர்க்கமூலத்துடனான ஒரு கோவை உள்ளது. வர்க்கமூலத்துடனான அக்கோவைக்குப் பதிலாகப் பகுதியில் நிறைவெண் ஒன்று (அல்லது விகிதமுறும் எண்) பெறப்படும் வகையில் இவற்றை ஒழுங்கு செய்யும் விதத்தை இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 6

$\frac{3}{\sqrt{2}}$ என்னும் எண்ணைப் பகுதியில் ஒரு நிறைவெண்ணைக் கொண்ட பின்னமாகத் தருக.

இங்கு பயன்படுத்தப்படும் முறையானது $\frac{3}{\sqrt{2}}$ இன் பகுதியையும் தொகுதியையும் $\sqrt{2}$ இனால் பெருக்குதலாகும்.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

இங்கு செய்யப்பட்ட செய்கை பகுதியை விகிதமுறும் எண்ணாக மாற்றுதல் எனப்படும்.

உதாரணம் 7

$\frac{a}{\sqrt{b}}$ இன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}}$$

$$= \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

சேடுகளுடனான பிரசினங்கள் சிலவற்றைத் தீர்க்கும் விதத்தைக் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 8

சுருக்குக. $4\sqrt{63} - 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28}$

$$4\sqrt{63} = 4 \times \sqrt{9 \times 7} = 4 \times 3\sqrt{7}$$

$$= 12\sqrt{7}$$

$$8\sqrt{28} = 8 \times \sqrt{4 \times 7} = 8 \times 2\sqrt{7}$$

$$= 16\sqrt{7}$$

எனவே $4\sqrt{63} - 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28} = 12\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - 16\sqrt{7}$

$$= -9\sqrt{7}$$

இறுதியாகச் சேடுடன் கூடிய சிக்கலான ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்க்கும் முறையைக் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 9

சுருக்குக. $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \sqrt{75} - \frac{3}{\sqrt{12}}$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \sqrt{75} - \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{2 \times 3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{25 \times 3} - \frac{3}{\sqrt{4 \times 3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{25 \times 3} - \frac{3}{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}$$

$$= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$= 7\sqrt{3} - \frac{3 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= 7\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2 \times 3}$$

$$= 7\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

பயிற்சி 1.3

1. முழுமைச் சேடைச் சேடாக மாற்றுக.

a. $\sqrt{20}$ b. $\sqrt{48}$ c. $\sqrt{72}$ d. $\sqrt{28}$

e. $\sqrt{80}$ f. $\sqrt{45}$ g. $\sqrt{98}$ h. $\sqrt{147}$

2. சேடை முழுமைச் சேடாக மாற்றுக.

a. $2\sqrt{3}$ b. $2\sqrt{5}$ c. $4\sqrt{7}$ d. $5\sqrt{2}$ e. $6\sqrt{11}$

3. சுருக்குக.

a. $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

b. $\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$

c. $4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

d. $6\sqrt{11} + 3\sqrt{7} - 2\sqrt{11} - 5\sqrt{7} + 4\sqrt{7}$

e. $8\sqrt{3} + 7\sqrt{7} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

4. சுருக்குக.

a. $3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}$ b. $5\sqrt{11} \times 3\sqrt{7}$ c. $\sqrt{5} \times 3\sqrt{3}$

d. $4\sqrt{14} \div 2\sqrt{7}$ e. $6\sqrt{27} \div 3\sqrt{3}$ f. $\sqrt{48} \div 5\sqrt{3}$

5. விகிதமுறா எண்களைப் பகுதியெண்ணாகக் கொண்ட பின்னங்களை விகிதமுறும் பகுதியெண்ணாக மாற்றுக.

a. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b. $\frac{5}{\sqrt{3}}$ c. $\frac{5}{\sqrt{7}}$ d. $\frac{12}{2\sqrt{3}}$ e. $\frac{27}{3\sqrt{2}}$

f. $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ g. $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{7}}$ h. $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ i. $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

6. சுருக்குக.

a. $2\sqrt{27} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{7} + 3\sqrt{28}$ b. $3\sqrt{63} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{27} + 3\sqrt{3}$

c. $2\sqrt{128} - 3\sqrt{50} + 2\sqrt{162} + \frac{4}{\sqrt{2}}$ d. $\sqrt{99} - 2\sqrt{44} + \frac{110}{\sqrt{11}}$

e. $\frac{\sqrt{20}}{2} - \sqrt{5}$

2 சுட்டிகளும் மடக்கைகளும் I

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- சுட்டி, மடக்கை விதிகளைக் கொண்டு வலுக்களும் மூலங்களும் இடம்பெறும் கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்
- சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

சுட்டிகள்

சுட்டிகளையும் மடக்கைகளையும் பற்றி நீங்கள் இதுவரைக்கும் கற்ற விடயங்களை மீட்பதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. சுருக்கிப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

a. $2^2 \times 2^3$ **b.** $(2^4)^2$ **c.** 3^{-2}

d. $\dfrac{5^3 \times 5^2}{5^5}$ **e.** $\dfrac{3^5 \times 3^2}{3^6}$ **f.** $(5^2)^2 \div 5^3$

g. $\dfrac{(2^2)^3 \times 2^4}{2^8}$ **h.** $\dfrac{5^{-3} \times 5^2}{5^0}$ **i.** $(5^2)^{-2} \times 5 \times 3^0$

2. சுருக்குக.

a. $a^2 \times a^3 \times a$ **b.** $a^5 \times a \times a^0$ **c.** $(a^2)^3$

d. $(x^2)^3 \times x^2$ **e.** $(xy)^2 \times x^0$ **f.** $(2x^2)^3$

g. $\dfrac{2pq \times 3p}{6p^2}$ **h.** $2x^{-2} \times 5xy$ **i.** $\dfrac{(3a)^{-2} \times 4a^2b^2}{2ab}$

3. சுருக்குக.

a. $\lg 25 + \lg 4$ **b.** $\log_2 8 - \log_2 4$

c. $\log_5 50 + \log_5 2 - \log_5 4$ **d.** $\log_a 5 + \log_a 4 - \log_a 2$

e. $\log_x 4 + \log_x 12 - \log_x 3$ **f.** $\log_p a + \log_p b - \log_p c$

4. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

a. $\log_5 x = \log_5 4 + \log_5 2$ **b.** $\log_5 4 - \log_5 2 = \log_5 x$

c. $\log_a 2 + \log_a x = \log_a 10$ **d.** $\log_3 x + \log_3 10 = \log_3 5 + \log_3 6 - \log_3 2$

e. $\lg 5 - \lg x + \lg 8 = \lg 4$ **f.** $\log_x 12 - \log_5 4 = \log_5 3$

2.1 வலுவின் பின்னச் சுட்டிகள்

4 இன் வர்க்கமூலம் என்பதை மூலக் குறியைக் கொண்டு $\sqrt{4}$ எனவும் சுட்டிகளைக் கொண்டு $4^{\frac{1}{2}}$ எனவும் எழுதலாம்.

இதற்கேற்ப $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$ என்பது தெளிவாகும்.

வேறோர் அத்தகைய சந்தர்ப்பத்தைக் கருதுவோம்.

$$\begin{aligned} 2 \times 2 \times 2 &= 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \\ &= 2^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

2 இன் மூன்றாம் வலு 8 ஆகும். அதாவது, 8 இன் கனமூலம் 2 ஆகும். அதனைக் குறியீடுகளைக் கொண்டு

$\sqrt[3]{8} = 2$ அல்லது $8^{\frac{1}{3}} = 2$ என எழுதலாம்.

அதாவது $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$ என்பது தெளிவாகும்.

மேலும் a ஆனது ஒரு நேர் மெய்யெண் எனின்,

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ என எழுதலாம்.

இதற்கேற்ப மூலக் குறிக்கும் வலுவின் சுட்டிக்குமிடையே உள்ள தொடர்பைப் பொதுவாகப் பின்வருமாறு காட்டுவோம்.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

சுட்டிக் கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கு இத்தொடர்புடைமை பயன்படுத்தப்படும் விதத்தைப் பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

1. பெறுமானங் காண்க.

(i) $\sqrt[3]{27}$ (ii) $(\sqrt{25})^{-2}$ (iii) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

(i) $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$

$= (3^3)^{\frac{1}{3}}$

$= 3^{3\times\frac{1}{3}}$

$= 3$

(ii) $(\sqrt{25})^{-2} = (25^{\frac{1}{2}})^{-2}$

$= \{(5^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-2}$

$= \{5^{2\times\frac{1}{2}}\}^{-2}$

$= 5^{-2}$

$= \frac{1}{5^2}$

$= \frac{1}{25}$

(iii) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

$= \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{3}}}{(2^3)^{\frac{1}{3}}}$

$= \frac{3^{3\times\frac{1}{3}}}{2^{3\times\frac{1}{3}}}$

$= \frac{3}{2}$

$= 1\frac{1}{2}$

சுட்டிகளைக் கொண்ட அட்சரகணிதக் கோவைகளைச் சுருக்குவதற்குச் சுட்டி விதிகள் பயன்படுத்தப்படும் விதத்தைப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு மேலும் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2

சுருக்கி, விடையை நேர்ச் சுட்டிகளுடன் தருக.

(i) $(\sqrt{x})^3$ (ii) $(\sqrt[3]{a})^{-\frac{1}{2}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{x^{-3}}}$

(i) $(\sqrt{x})^3 = (x^{\frac{1}{2}})^3$

$= x^{\frac{1}{2}\times 3}$

$= x^{\frac{3}{2}}$

(ii) $(\sqrt[3]{a})^{-\frac{1}{2}} = (a^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}$

$= a^{\frac{1}{3}\times -\frac{1}{2}}$

$= a^{-\frac{1}{6}}$

$= \frac{1}{a^{\frac{1}{6}}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{x^{-3}}} = \frac{1}{(x^{-3})^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{x^{-3\times\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{x^{-\frac{3}{2}}}$

$= x^{\frac{3}{2}}$

உதாரணம் 3

பெறுமானங் காண்க. (i) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$

(i) $$\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3^3}{4^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3\times\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{9}{16}}}$$

(ii) $$\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4\times\frac{-3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$$

இப்போது சற்றுச் சிக்கலான ஓர் உதாரணமாக $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 \times 3^0$ இன் பெறுமானத்தை எவ்வாறு காணலாமென ஆராய்வோம்.

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 \times 3^0 = \left(\frac{5^3}{2^6}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^3 \times 1$$

$$= \left(\frac{2^6}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(2^{5\times\frac{1}{5}}\right)^3$$

$$= \frac{2^{6\times\frac{1}{3}}}{5^{3\times\frac{1}{3}}} \times 2^3$$

$$= \frac{2^2}{5} \times 2^3$$

$$= \frac{2^5}{5}$$

$$= \frac{32}{5}$$

$$= 6\frac{2}{5}$$

உதாரணம் 4

சுருக்குக. $\dfrac{\sqrt[3]{343x^{\frac{3}{2}}}}{x}$

$$\frac{\sqrt[3]{343x^{\frac{3}{2}}}}{x} = \left(343x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \div x$$

$$= 343^{\frac{1}{3}} \times \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \div x$$

$$= (7^3)^{\frac{1}{3}} \times \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \div x$$

$$= 7 \times x^{\frac{1}{2}} \div x$$

$$= 7 \times x^{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= 7 \times x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{7}{x^{\frac{1}{2}}}$$

பயிற்சி 2.1

1. மூலக் குறியீட்டுடன் எழுதுக.

a. $p^{\frac{1}{3}}$ **b.** $a^{\frac{2}{3}}$ **c.** $x^{-\frac{2}{3}}$

d. $m^{\frac{4}{5}}$ **e.** $y^{-\frac{3}{4}}$ **f.** $x^{-\frac{5}{3}}$

2. நேர்ச் சுட்டியுடன் எழுதுக.

a. $\sqrt{m^{-1}}$ **b.** $\sqrt[3]{x^{-1}}$ **c.** $\sqrt[5]{p^{-2}}$ **d.** $(\sqrt{a})^{-3}$ **e.** $\sqrt[4]{x^{-3}}$

f. $(\sqrt[3]{p})^{-5}$ **g.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^{-3}}}$ **h.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}}$ **i.** $2\sqrt[3]{x^{-2}}$ **j.** $\dfrac{1}{3\sqrt{a^{-5}}}$

3. பெறுமானங் காண்க.

a. $\sqrt{25}$ **b.** $\sqrt[4]{16}$ **c.** $(\sqrt{4})^5$

d. $(\sqrt[5]{32})^3$ **e.** $\sqrt[4]{81^3}$ **f.** $\sqrt[3]{1000^2}$

g. $\left(\dfrac{27}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$ **h.** $\left(\dfrac{81}{10000}\right)^{\frac{3}{4}}$ **i.** $\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-\frac{5}{6}}$

j $\left(\dfrac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$ **k.** $(0.81)^{\frac{3}{2}}$ **l.** $(0.125)^{-\frac{2}{3}}$

m. $\left(\dfrac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} \times 2^0$ **n.** $\left(\dfrac{9}{100}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \left(\dfrac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$ **o.** $(27)^{1\frac{1}{3}} \times (81)^{-1\frac{1}{4}}$

p. $\left(11\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(6\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ **q.** $(0.125)^{-\frac{1}{3}} \times (0.81)^{\frac{3}{2}}$ **r.** $(\sqrt[3]{8})^2 \times \sqrt[4]{16^3}$

4. சுருக்கி நேர்ச் சுட்டியுடன் எழுதுக.

a. $\sqrt[3]{a^{-1}} \div \sqrt[3]{a}$ **b.** $\sqrt[5]{a^{-3}} \div \sqrt[5]{a^7}$ **c.** $\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[3]{a^{-3}}$

d. $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[6]{x^{-5}}$ **e.** $\left\{\left(\sqrt{a^3}\right)^{-2}\right\}^{\frac{-1}{2}}$ **f.** $\left(\sqrt{x^2y^2}\right)^{-6}$

g. $\sqrt{\dfrac{4a^{-2}}{9x^2}}$ **h.** $\left(\sqrt[3]{27x^3}\right)^{-2}$ **i.** $\left(\dfrac{xy^{-1}}{\sqrt{x^5}}\right)^{-2}$

2.2 சுட்டிகள் இடம்பெறும் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

$2^x = 2^3$ என்பது ஒரு சமன்பாடாகும். அதன் சமக் குறியின் இரு பக்கங்களிலும் உள்ள இரு வலுக்களினதும் அடிகள் சமமாகையால், இரு சுட்டிகளும் சமம் ஆகும். இதற்கேற்ப $2^x = 2^3$ ஆக இருக்கும்போது $x = 3$ ஆகும்.

அவ்வாறே $x^5 = 2^5$ என்னும் சமன்பாட்டிலும் சமக் குறியின் இரு பக்கங்களிலும் சுட்டிகள் இரண்டிலும் சமமான இரு வலுக்கள் இருக்கின்றன. அச்சுட்டிகள் சமமாகையால், இரு அடிகளும் சமமாகும். இதற்கேற்ப $x^5 = 2^5$ ஆக இருக்கும்போது $x = 2$ ஆகும். ஆனால் $x^2 = 3^2$ எனின், x யிற்கு $+3, -3$ என்னும் இரு பெறுமானங்களும் x இன் தீர்வுகளாகும். ஆயினும் இப்பாடத்தில் $x > 0$ ஆகவுள்ள சமன்பாடுகளை மாத்திரம் கவனத்தில் கொள்வோம். 1 இன் சுட்டிகளில் விசேடமான ஒரு பண்பு உண்டு. அதாவது 1 இன் எந்தவொரு சுட்டியும் 1 ஆகும். அதாவது எல்லா m இற்கும் $1^m = 1$ ஆகும்.

பொதுவாக மேற்குறித்த கோட்பாட்டைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$x > 0,\ y > 0,\ x \neq 1,\ y \neq 1$ ஆயின்

$x \neq 0$ ஆக இருக்கும்போது $x^m = x^n$ எனின், $m = n$ ஆகும்.
$m \neq 0$ ஆக இருக்கும்போது $x^m = y^m$ எனின், $x = y$ ஆகும்.

சுட்டிகளுடனான சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்கு மேற்குறித்த கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

உதாரணம் 1

தீர்க்க.

(i) $4^x = 64$ (ii) $x^3 = 343$ (iii) $3 \times 9^{2x-1} = 27^{-x}$

(i) $4^x = 64$

$4^x = 4^3$

$\therefore x = 3$

(ii) $x^3 = 343$

$x^3 = 7^3$

$\therefore x = 7$

(iii) $3 \times 9^{2x-1} = 27^{-x}$

$3 \times (3^2)^{2x-1} = (3)^{3(-x)}$

$3 \times 3^{2(2x-1)} = 3^{-3x}$

$3^{1+4x-2} = 3^{-3x}$

$\therefore 1 + 4x - 2 = -3x$

$4x + 3x = 2 - 1$

$7x = 1$

$x = \frac{1}{7}$

பயிற்சி 2.2

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

a. $3^x = 9$ **b.** $3^{x+2} = 243$

c. $4^{3x} = 32$ **d.** $2^{5x-2} = 8^x$

e. $8^{x-1} = 4^x$ **f.** $x^3 = 216$

g. $2\sqrt{x} = 6$ **h.** $\sqrt[3]{2x^2} = 2$

2. சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

a. $2^x \times 8^x = 256$ **b.** $8 \times 2^{x-1} = 4^{x-2}$

c. $5 \times 25^{2x-1} = 125$ **d.** $3^{2x} \times 9^{3x-2} = 27^{-3x}$

e. $4^x = \frac{1}{64}$ **f.** $(3^x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{27}$

g. $3^{4x} \times \frac{1}{9} = 9^x$ **h.** $x^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$

2.3 மடக்கை விதிகள்

$\log_2 (16 \times 32) = \log_2 16 + \log_2 32$, $\log_2 (32 \div 16) = \log_2 32 - \log_2 16$ என மடக்கை விதிகளைக் கொண்டு எழுதலாம் என்பதை நாம் அறிவோம். அவ்விதிகள் பொதுவாக $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$ எனவும்

$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ எனவும் தரப்படும்.

அத்தகைய வேறொரு மடக்கை விதியை இப்போது அறிந்து கொள்வோம்.

ஓர் உதாரணமாக $\log_5 125^4$ ஐக் கருதுவோம்.

$$\begin{aligned}\log_5 125^4 &= \log_5 (125 \times 125 \times 125 \times 125)\\ &= \log_5 125 + \log_5 125 + \log_5 125 + \log_5 125\\ &= 4 \log_5 125\end{aligned}$$

அவ்வாறே

$\lg_{10} 10^5 = 5 \lg_{10} 10$

$\log_3 5^2 = 2 \log_3 5$ இதனைப் பொதுவாக ஒரு மடக்கை விதியாகப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$$\boxed{\log_a m^r = r \log_a m}$$

பின்னச் சுட்டிகளைக் கொண்ட கோவைகளுக்கும் இவ்விதி உண்மையாக இருக்கும் அதே வேளை அதற்குரிய சில உதாரணங்கள் கீழே காணப்படுகின்றன.

$$\log_2 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 3$$

$$\log_5 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_5 7$$

மேலே இனங்கண்ட மடக்கை விதி உட்பட மடக்கை விதிகள் பயன்படுத்தப்படும் விதம் பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் காட்டப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

பெறுமானங் காண்க.

(i) $\lg 1000$ (ii) $\log_4 \sqrt[3]{64}$ (iii) $2 \log_2 2 + 3 \log_2 4 - 2\log_2 8$

(i) $\lg 1000 = \lg 10^3$

$= 3 \lg 10$

$= 3 \times 1$ ($\lg 10 = 1$ என்பதால்)

$= 3$

(ii) $\log_4 \sqrt[3]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3} \log_4 64$

$= \frac{1}{3} \log_4 4^3$

$= \frac{1}{3} \times 3 \log_4 4$

$= \log_4 4$

$= 1$

(iii) $2 \log_2 2 + 3 \log_2 4 - 2\log_2 8 = 2\log_2 2 + 3 \log_2 2^2 - 2\log_2 2^3$

$= \log_2 2^2 + \log_2 (2^2)^3 - \log_2 (2^3)^2$

$= \log_2 \left(\frac{2^2 \times (2^2)^3}{(2^3)^2} \right)$

$= \log_2 \left(\frac{2^2 \times 2^6}{2^6} \right)$

$= \log_2 2^2$

$= 2 \log_2 2$

$= 2$

உதாரணம் 2

தீர்க்க.

(i) $2\lg 8 + 2\lg 5 = \lg 4^3 + \lg x$

$$\begin{aligned}\lg x &= 2\lg 8 + 2\lg 5 - \lg 4^3\\ &= \lg 8^2 + \lg 5^2 - \lg 4^3\\ &= \lg \frac{8^2 \times 5^2}{4^3}\\ &= \lg 25\\ \therefore \quad x &= 25\end{aligned}$$

(ii) $2 \log_b 3 + 3 \log_b 2 - \log_b 72 = \frac{1}{2} \log_b x$

$$\begin{aligned}2 \log_b 3 + 3 \log_b 2 - \log_b 72 &= \frac{1}{2} \log_b x\\ \log_b 3^2 + \log_b 2^3 - \log_b 72 &= \log_b x^{\frac{1}{2}}\\ \log_b\left(\frac{3^2 \times 2^3}{72}\right) &= \log_b x^{\frac{1}{2}}\\ \frac{3^2 \times 2^3}{72} &= x^{\frac{1}{2}}\\ 1^2 &= (x^{\frac{1}{2}})^2\\ 1 &= x^1\\ x &= 1\end{aligned}$$

(iii) வாய்ப்புப் பார்க்க. $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 40 - \log_5 8 + 1$

இ.கை.ப. $= \log_5 75 - \log_5 3$

$$\begin{aligned}&= \log_5 \frac{75}{3}\\ &= \log_5 25\\ &= \log_5 5^2\\ &= 2\end{aligned}$$

வ.கை.ப. $= \log_5 40 - \log_5 8 + 1$

$= \log_5 \frac{40}{8} + 1$

$= \log_5 5 + 1$

$= 1 + 1$

$= 2$

$\therefore \log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 40 - \log_5 8 + 1$

மடக்கை விதிகள் பற்றிக் கற்ற விடயங்களைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பயிற்சியை செய்க.

பயிற்சி 2.3

1. பெறுமானங் காண்க.

a. $\log_2 32$ **b.** $\lg 10\,000$ **c.** $\frac{1}{3}\log_3 27$

d. $\frac{1}{2}\log_5 \sqrt{25}$ **e.** $\log_3 \sqrt[4]{81}$ **f.** $3\log_2 \sqrt[3]{8}$

2. பின்வரும் கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் சுருக்கிப் பெறுமானங் காண்க.

a. $2\log_2 16 - \log_2 8$ **b.** $\lg 80 - 3\lg 2$

c. $2\lg 5 + 3\lg 2 - \lg 2$ **d.** $\lg 75 - \lg 3 + \lg 28 - \lg 7$

e. $\lg 18 - 3\lg 3 + \frac{1}{2}\lg 9 + \lg 5$ **f.** $4\lg 2 + \lg \frac{15}{4} - \lg 6$

g. $\lg \frac{1}{256} - \lg \frac{125}{4} - 3\lg \frac{1}{20}$ **h.** $\log_3 27 + 2\log_3 3 - \log_3 3$

i. $\lg \frac{12}{5} + \lg \frac{25}{21} - \lg \frac{2}{7}$ **j.** $\lg \frac{3}{4} - 2\lg \frac{3}{10} + \lg 12 - 2$

3. தீர்க்க.

a. $\lg x + \lg 4 = \lg 8 + \lg 2$

b. $4\lg 2 + 2\lg x + \lg 5 = \lg 15 + \lg 12$

c. $3\lg x + \lg 96 = 2\lg 9 + \lg 4$

d. $\lg x = \frac{1}{2}(\lg 25 + \lg 8 - \lg 2)$

e. $3\lg x + 2\lg 8 = \lg 48 + \frac{1}{2}\lg 25 - \lg 30$

f. $\lg 125 + 2\lg 3 = 2\lg x + \lg 5$

பலவினப் பயிற்சி

1. பெறுமானங் காண்க.

a. $(\sqrt[3]{8})^2 \times \frac{1}{\sqrt[3]{27}}$

b. $(\sqrt{125})^3 \times \frac{1}{\sqrt{20}} \times 10$

c. $\dfrac{32^{-\frac{2}{5}} \times 216^{\frac{2}{3}}}{81^{\frac{3}{4}} \times \sqrt[3]{8^0} \times \sqrt[3]{27^{-2}}}$

d. $\sqrt{\dfrac{18 \times 5^2}{8}}$

e. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \times 5^{-2} \times 100$

f. $27^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{3}{4}}$

2. சுருக்கி, நேர்ச் சுட்டிகளுடன் தருக.

a. $\sqrt{a^2 b^{-\frac{1}{2}}}$

b. $(x^{-4})^{\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{x^{-3}}}$

c. $(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})\,(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$

d. $(x \div \sqrt[n]{x})^n$

e. $\left[\left(\sqrt{a^3}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{2}}$

3. பின்வருவனவற்றை வாய்ப்புப் பார்க்க.

a. $\lg\left(\dfrac{217}{38} \div \dfrac{31}{266}\right) = 2\lg 7$

b. $\log_3 24 + \log_3 5 - \log_3 40 = 1$

c. $\dfrac{1}{2}\lg 9 + \lg 2 = 2\lg 3 - \lg 1.5$

d. $\lg 26 + \lg 119 - \lg 51 - \lg 91 = \lg 2 - \lg 3$

e. $2\log_a 3 + \log_a 20 - \log_a 36 = \log_a 10 - \log_a 2$

3 சுட்டிகளும் மடக்கைகளும் II

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி 0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே உள்ள எண்களின் வலுக்களும் மூலங்களும் இடம்பெறும் பெருக்கல்களையும் வகுத்தல்களையும் கொண்ட கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்
- விஞ்ஞானக் கணிகருவியில் $\boxed{\wedge}$, $\boxed{\sqrt{\ }}$ என்னும் சாவிகளை இனங்காண்பதற்கும் தசமங்கள், வலுக்கள், மூலங்கள் ஆகியன இடம்பெறும் கோவைகளை விஞ்ஞானக் கணிகருவியைக் கொண்டு சுருக்குவதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

மடக்கை அட்டவணையும் அதன் பயன்பாடுகளும்

$10^3 = 1000$. அதனை $\log_{10} 1000 = 3$ என மடக்கை வடிவத்தில் எழுதலாம். $\log_{10}$ இற்குப் பதிலாக lg ஐ மாத்திரம் பயன்படுத்தி அதனை $\lg 1000 = 3$ எனக் காட்டலாம் என்பதை நாம் அறிவோம். அடி 10 ஐத் தவிர வேறு அடிகள் இருக்கும்போது அடியைக் குறிப்பிடுதல் வேண்டும். உதாரணமாக

$5^2 = 25$ ஆகையால் $\log_5 25 = 2$,

$10^0 = 1$ ஆகையால் $\lg 1 = 0$

$10^1 = 10$ ஆகையால் $\lg 10 = 1$.

எந்தவொரு நேர் எண்ணினதும் மடக்கைகளைப் பெறுதலை மடக்கை அட்டவணைகளைக் கொண்டு செய்யலாம். மடக்கைகளைப் பயன்படுத்திப் பெருக்கலும் வகுத்தலும் உட்பட எண்களைச் சுருக்கலை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்வோம்.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் அட்டவணைகளைப் பூரணப்படுத்துக.

(i)

எண்	விஞ்ஞான முறைக் குறிப்பீடு	மடக்கை		
		சிறப்பியல்பு	தசமக்கூட்டு	மடக்கை
73.45	7.345×10^1	1	0.8660	1.8660
8.7				
12.5				
725.3				
975				

(ii)

மடக்கை	மடக்கை		விஞ்ஞான முறைக் குறிப்பீடு	எண்
	சிறப்பியல்பு	தசமக்கூட்டு		
1.5492				
2.9059				
1.4036				
2.8798				
3.4909				

2. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

a. lg 5.745 = 0.7593 ஆகையால் 5.745 = $10^{0.7593}$
b. lg 9.005 = ... ஆகையால் 9.005 = $10^{\dots\dots}$
c. lg 82.8 = ... ஆகையால் 82.8 = $10^{\dots\dots}$
d. lg 74.01 = ... ஆகையால் 74.01 = $10^{\dots\dots}$
e. lg 853.1 = ... ஆகையால் 853.1 = $10^{\dots\dots}$
f. antilog 0.7453 = 5.562 ஆகையால் 5.562 = $10^{0.7453}$
g. antilog 0.0014 = ... ஆகையால் .... = $10^{0.0014}$
h. antilog 1.9251 = ... ஆகையால் .... = $10^{1.9251}$
i. antilog 2.4374 = ... ஆகையால் .... = $10^{2.4374}$
j. antilog 3.2001 = ... ஆகையால் .... = $10^{3.2001}$

3. வெற்றிடங்களை நிரப்பி P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) மடக்கைக் கோவையாக

$$P = \frac{27.32 \times 9.8}{11.5}$$

$\lg P = \lg \dots + \lg \dots - \lg \dots$

$= \dots + \dots - \dots.$

$= \dots\dots\dots$

$\therefore\ P = \text{antilog } \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots$

(ii) சுட்டி வடிவத்தில்

$$P = \frac{27.32 \times 9.8}{11.5}$$

$$= \frac{10^{\dots\dots} \times 10^{\dots\dots}}{10^{\dots\dots}}$$

$$= \frac{10^{\dots\dots}}{10^{\dots\dots}}$$

$= 10^{\dots\dots}$

$= \dots\dots\dots \times 10^{\dots}$

$= \dots\dots\dots\dots$

4. பின்வரும் கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக.

a. 14.3×95.2 **b.** $2.575 \times 9.27 \times 12.54$ **c.** $\frac{9.87 \times 7.85}{4.321}$

3.1 ஒன்றிலும் குறைந்த தசம எண்களின் மடக்கைகள்

மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து 1 இலும் கூடிய எண்களின் மடக்கைகளைப் பெற்ற விதத்தில் கவனஞ் செலுத்தி 0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே உள்ள எண்களின் மடக்கைகள் பெறப்படும் விதம் பற்றி இப்போது பார்ப்போம்.

எண்	விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடு	மடக்கை		மடக்கை
		சிறப்பியல்பு	தசமக்கூட்டு	
5432	5.432×10^3	3	0.7350	3.7350
543.2	5.432×10^2	2	0.7350	2.7350
54.32	5.432×10^1	1	0.7350	1.7350
5.432	5.432×10^0	0	0.7350	0.7350
0.5432	5.432×10^{-1}	−1	0.7350	$\overline{1}.7350$
0.05432	5.432×10^{-2}	−2	0.7350	$\overline{2}.7350$
0.005432	5.432×10^{-3}	−3	0.7350	$\overline{3}.7350$
0.0005432	5.432×10^{-4}	−4	0.7350	$\overline{4}.7350$

மேற்குறித்த அட்டவணைக்கேற்ப முதல் நிரலில் 5.432 இற்குப் பின்னர் உள்ள 0 இற்கும் 1 இற்கும் இடைப்பட்ட எண்களின் மடக்கையின் சிறப்பியல்பு ஒரு மறைப் பெறுமானத்தை எடுக்கின்றது. சிறப்பியல்பு ஒரு மறைப் பெறுமானமாக இருந்தாலும் அட்டவணையிலிருந்து பெறப்படும் தசமக்கூட்டு ஒரு நேர்ப் பெறுமானமாகும். சிறப்பியல்பு மாத்திரம் மறையாக இருக்கின்றது என்பதைக் காட்டுவதற்கு அதற்கு மேலே "−" இடப்படுகின்றது. இது **பிரிகோடு** என வாசிக்கப்படும். உதாரணமாக $\overline{2}.3725$ ஆனது பிரிகோடு (Bar) இரண்டு தசம் மூன்று ஏழு இரண்டு ஐந்து என வாசிக்கப்படும். மேலும் $\overline{2}.3725$ இன் மூலம் $-2 + 0.3725$ காட்டப்படுகின்றது.

0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே உள்ள எண்களின் மடக்கையின் சிறப்பியல்பு மறையாகும். அத்தகைய ஓர் எண்ணின் சிறப்பியல்பைப் பெறுதல் விஞ்ஞான முறைக் குறிப்பீட்டைப் போன்று தசமப் புள்ளிக்குப் பின்னர் வரும் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையினாலும் செய்யப்படலாம். தசமப் புள்ளிக்குப் பின்னர் (அதன் பின்னர் வரும் முதற் பூச்சியமல்லாத இலக்கத்துக்கு முன்னர்) உள்ள பூச்சியங்களின்

எண்ணிக்கையுடன் ஒன்றைக் கூட்டி அதன் மறைப் பெறுமானத்தை எடுக்கும்போது கிடைக்கும் பெறுமானம் மடக்கையின் சிறப்பியல்பாகும். இதனை மேலேயுள்ள அட்டவணையில் அவதானிக்கலாம்.

உதாரணம்:

0.004302 தசமப் புள்ளிக்குப் பின்னர் முதற் பூச்சியமல்லாத இலக்கத்துக்கு முன்னர் உள்ள பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 2, சிறப்பியல்பு $\overline{3}$

0.04302 தசமப் புள்ளிக்குப் பின்னர் உள்ள பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 1, சிறப்பியல்பு $\overline{2}$

0.4302 தசமப் புள்ளிக்குப் பின்னர் உள்ள பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 0, சிறப்பியல்பு $\overline{1}$

அப்போது $\lg 0.004302 = \overline{3}.6337$

அது சுட்டி வடிவத்தில் எழுதப்படும்போது

$0.004302 = 10^{\overline{3}.6337}$ ஆகும். வேறொரு விதமாகக் காட்டப்படும்போது

$0.004302 = 10^{-3} \times 10^{0.6357}$ ஆகும்.

0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே உள்ள எண்களின் மடக்கைகளைப் பெறுவதில் பரிச்சயப்படுவதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

பயிற்சி 3.1

1. பின்வரும் எண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் சிறப்பியல்பை எழுதுக.

a. 0.9843	**b.** 0.05	**c.** 0.0725
d. 0.0019	**e.** 0.003141	**f.** 0.000783

2. பெறுமானங் காண்க.

a. lg 0.831	**b.** lg 0.01175	**c.** lg 0.0034
d. lg 0.009	**e.** lg 0.00005	**f.** lg 0.00098

3. பின்வரும் எண்களைப் பத்தின் வலுவாக எழுதுக.

a. 0.831	**b.** 0.01175	**c.** 0.0034
d. 0.009	**e.** 0.00005	**f.** 0.00098

3.2 மடக்கைக்குரிய எண் (முரண்மடக்கை / antilog)

முன்னர் கற்ற 1 இலும் கூடிய எண்களின் முரண்மடக்கையைப் பெற்ற விதத்தை நினைவுகூர்வோம்.

antilog $2.7421 = 5.522 \times 10^2$
$= 552.2$

ஓர் எண்ணை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் எழுதும்போது கிடைக்கும் 10 இன் வலுவின் சுட்டி அவ்வெண்ணின் மடக்கையின் சிறப்பியல்பாகும். முரண் மடக்கையைப் பெறுவதற்குத் தசமப் புள்ளி செல்லவேண்டிய தானங்களின் எண்ணிக்கை சிறப்பியல்பினால் காட்டப்படுகின்றது. இதற்கேற்ப மேற்குறித்த 5.522 இல் தசமப் புள்ளிகள் இரு தானங்கள் வலக்கைப் பக்கமாகச் சென்று 552.2 கிடைத்துள்ளது. ஆனால் ஒரு மறைச் சிறப்பியல்பு உள்ள சந்தர்ப்பத்தில் இத்தசமப் புள்ளி இடக் கைப் பக்கமாகச் செல்லல் நடைபெறுகின்றது.

antilog $\overline{2}.7421 = 5.522 \times 10^{-2}$ (தசமப் புள்ளி இடக் கைப் பக்கமாக இரு தானங்களுக்குச் செல்ல வேண்டும்)
$= 0.05522$ (பிரிகோடு 2 ஆகையால் தசமப் புள்ளிக்கு வலப்பக்கமாக 1 பூச்சியம்)

antilog $\overline{1}.7421 = 5.522 \times 10^{-1}$ (தசமப் புள்ளி இடக் கைப் பக்கமாக ஒரு தானத்திற்குச் செல்ல வேண்டும்)
$= 0.5522$ (பிரிகோடு 1 ஆகையால் தசமப் புள்ளிக்கு வலப்பக்கமாகப் பூச்சியம் இல்லை)

பயிற்சி 3.2

1. விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் உள்ள பின்வரும் எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் தசம எண்ணாக எழுதுக.

a. 3.37×10^{-1} **b.** 5.99×10^{-3} **c.** 6.0×10^{-2}
d. 5.745×10^{0} **e.** 9.993×10^{-4} **f.** 8.777×10^{-3}

2. மடக்கை அட்டவணையைக் கொண்டு பெறுமானத்தைக் காண்க.

a. antilog $\overline{2}.5432$ **b.** antilog $\overline{1}.9321$ **c.** antilog 0.9972
d. antilog $\overline{4}.5330$ **e.** antilog $\overline{2}.0000$ **f.** antilog $\overline{3}.5555$

3.3 பிரிகோடு இடம்பெறும் மடக்கைகளைக் கூட்டலும் கழித்தலும்

(a) கூட்டல்

ஒரு மடக்கையின் தசமக்கூட்டு மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து பெறப்படும் அதே வேளை அது எப்போதும் ஒரு நேர்ப் பெறுமானமாகும். எனினும், சிறப்பியல்பு நேர் அல்லது மறை அல்லது பூச்சியம் என்பதை நாம் அறிவோம். $\overline{2}.5143$ இன் தசமக்கூட்டு 0.5143 நேரும் சிறப்பியல்பு $\overline{2}$ மறையும் ஆகும். இத்தகைய எண்களைக் கூட்டும்போது அல்லது கழிக்கும்போது தசமக்கூட்டுப் பகுதியை வேறாகவும் சிறப்பியல்புப் பகுதியை வேறாகவும் சுருக்க வேண்டும்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக; விடையில் மறை பெறப்படும் சந்தர்ப்பத்தில் பிரிகோட்டுடன் தருக.

(i) $\overline{2}.5143 + \overline{1}.2375$
$$= (-2) + 0.5143 + (-1) + 0.2375$$
$$= (-2 - 1) + (0.5143 + 0.2375)$$
$$= -3 + 0.7518$$
$$= \overline{3}.7518$$

(ii) $\overline{3}.9211 + 2.3142$
$$= (-3) + 0.9211 + 2 + 0.3142$$
$$= (-3) + 2 + 0.9211 + 0.3142$$
$$= -1 + 1 + 0.2353$$
$$= 0.2353$$

(iii) $\overline{3}.8753 + 1.3475$
$$= (-3) + 0.8753 + 1 + 0.3475$$
$$= (-3) + 1 + 0.8753 + 0.3475$$
$$= -2 + 1.2228$$
$$= -2 + 1 + 0.2228$$
$$= \overline{1}.2228$$

(b) கழித்தல்

கூட்டலில் போன்று தசமக்கூட்டு நேரெனக் கொண்டு வலப்பக்கமிருந்து இடப்பக்கமாக முறையே கழித்தல் வேண்டும்.

உதாரணம் 2

சுருக்குக; விடையில் மறை பெறப்படும் சந்தர்ப்பத்தில் பிரிகோட்டுடன் தருக.

(i) $\overline{2}.5143 - 1.3143 = -2 + 0.5143 - (1 + 0.3143)$
$$= -2 + 0.5143 - 1 - 0.3143$$
$$= -2 - 1 + 0.5143 - 0.3143$$
$$= -3 + 0.2000$$
$$= \overline{3}.2000$$

(ii) $2.5143 - \bar{1}.9143 = 2 + 0.5143 - (-1 + 0.9143)$
$= 2 + 0.5143 + 1 - 0.9143$
$= 3 - 0.4000$
$= 2.6000$

(iii) $0.2143 - \bar{1}.8143 = 0.2143 - (-1 + 0.8143)$
$= 0.2143 + 1 - 0.8143$
$= 1 - 0.6000$
$= 0.4$

(iv) $\bar{2}.5143 - \bar{1}.9143 = -2 + 0.5143 - (-1 + 0.9143)$
$= -2 + 0.5143 + 1 - 0.9143$
$= -2 + 1 + 0.5143 - 0.9143$
$= -1 - 0.4000$

இங்கு தசமக்கூட்டுக்கு ஒரு மறைப் பெறுமானம் கிடைக்கின்றது. ஆனால் மடக்கையில் தசமக்கூட்டு நேராக இருத்தல் வேண்டும் ஆகையால், பின்வரும் விதமாக ஓர் உத்தியைப் பயன்படுத்துவோம்.

$-1 - 0.4 = -1 - 1 + 1 - 0.4$ ($-1+1 = 0$ ஆகையால் பெறுமானம் மாறுவதில்லை)
$= -2 + 0.6$
$= \bar{2}.6$

இங்கு சிறப்பியல்பிற்கு -1 உம் தசமக்கூட்டிற்கு $+1$ உம் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு: மேற்குறித்த இம்முறை தசமக்கூட்டில் மறை கிடைத்தலைத் தவிர்க்கத்தக்தாக இருந்தது.

$-2 + 0.5143 + 1 - 0.9143 = -2 + 1.5143 - 0.9143 = -2 + 0.6 = \bar{2}.6$

பயிற்சி 3.3

1. சுருக்குக.

a. $0.7512 + \bar{1}.3142$ **b.** $\bar{1}.3072 + \bar{2}.2111$ **c.** $\bar{2}.5432 + \bar{1}.9513$
d $\bar{3}.9121 + \bar{1}.5431$ **e.** $0.7532 + \bar{3}.8542$ **f.** $\bar{1}.8311 + \bar{2}.5431 + 1.3954$

2. சுருக்குக.

a. $3.8760 - \bar{2}.5431$ **b.** $\bar{2}.5132 - \bar{1}.9332$ **c.** $\bar{3}.5114 - \bar{2}.4312$
d $\bar{2}.9372 - 1.5449$ **e.** $0.7512 + \bar{1}.9431$ **f.** $\bar{1}.9112 - \bar{3}.9543$

3. சுருக்குக.

a. $\bar{1}.2513 + 0.9172 - \bar{1}.514$ **b.** $\bar{3}.2112 + 2.5994 - \bar{1}.5004$

c. $\bar{3}.2754 + \bar{2}.8211 - \bar{1}.4372$ **d** $0.8514 - \bar{1}.9111 - \bar{2}.3112$

e. $\bar{3}.7512 - (0.2511 + \bar{1}.8112)$ **f.** $\bar{1}.2572 + 3.9140 - \bar{1}.1111$

3.4 மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி எண்கோவைகளைச் சுருக்கல்

கீழே தரப்பட்டுள்ள மடக்கை விதிகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் மடக்கைகளை எண் கணிப்புச் செய்யும் விதத்தைச் சில உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

1. $\log_a (P \times Q) = \log_a P + \log_a Q$

2. $\log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$

உதாரணம் 1

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி மடக்கை விதிகளைப் பிரயோகித்துச் சுருக்குக.

a. 43.85×0.7532 **b.** 0.0034×0.8752 **c.** $0.0875 \div 18.751$ **d.** $0.3752 \div 0.9321$

a. 43.85×0.7532

முறை I

$P = 43.85 \times 0.7532$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg (43.85 \times 0.7532)$

$= \lg 43.85 + \lg 0.7532$

$= 1.6420 + \bar{1}.8769$

$= 1 + 0.6420 - 1 + 0.8769$

$= 1.5189$

$\therefore P = \text{antilog } 1.5189$

$= 33.03$

முறை II

சுட்டி வடித்தில் சுருக்கல்

43.85×0.7532

$= 10^{1.6420} \times 10^{\bar{1}.8769}$

$= 10^{1.5189}$

$= 3.303 \times 10^{1}$

$= 33.03$

b. 0.0034×0.8752

$P = 0.0034 \times 0.8752$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg (0.0034 \times 0.8752)$

$= \lg 0.0034 + \lg 0.8752$

$= \bar{3}.5315 + \bar{1}.9421$

$= -3 + 0.5315 - 1 + 0.9421$

$= -4 + 1 + 0.4736$

$= -3 + 0.4736$

$= \bar{3}.4736$

$\therefore P = \text{antilog } \bar{3}.4736$

$= 0.002975$

சுட்டி வடித்தில் சுருக்கல்

0.0034×0.8752

$= 10^{\bar{3}.5315} \times 10^{\bar{1}.9421}$

$= 10^{\bar{3}.4736}$

$= 2.975 \times 10^{-3}$

$= 0.002975$

c. $0.0875 \div 18.75$

$P = 0.0875 \div 18.75$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg (0.0875 \div 18.75)$

$= \lg 0.0875 - \lg 18.75$

$= \bar{2}.9420 - 1.2730$

$= -2 + 0.9420 - 1 - 0.2730$

$= -3 + 0.6690$

$= \bar{3}.6690$

$\therefore \quad P = \text{antilog } \bar{3}.6690$

$= 0.004666$

சுட்டி வடித்தில் சுருக்கல்
$0.0875 \div 18.75$
$= 10^{\bar{2}.9420} \div 10^{1.2730}$
$= 10^{\bar{2}.9420 - 1.2730}$
$= 10^{\bar{3}.6690}$
$= 4.666 \times 10^{-3}$
$= 0.004666$

d. $0.3752 \div 0.9321$

$P = 0.3752 \div 0.9321$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg (0.3752 \div 0.9321)$

$= \lg 0.3752 - \lg 0.9321$

$= \bar{1}.5742 - \bar{1}.9694$

$= -1 + 0.5742 - (-1 + 0.9694)$

$= -1 + 0.5742 + 1 - 0.9694$

$= -1 + 0.5742 + 0.0306$

$= -1 + 0.6048$

$= \bar{1}.6048$

$\therefore \quad P = \text{antilog } \bar{1}.6048$

$= 0.4026$

சுட்டி வடித்தில் சுருக்கல்
$0.3752 \div 0.9321$
$= 10^{\bar{1}.5742} \div 10^{\bar{1}.9694}$
$= 10^{\bar{1}.5742 - \bar{1}.9694}$
$= 10^{\bar{1}.6048}$
$= 4.026 \times 10^{-1}$
$= 0.4026$

உதாரணம் 2

மடக்கை வடிவில் சுருக்குக. $\dfrac{8.753 \times 0.02203}{0.9321}$

$$P = \frac{8.753 \times 0.02203}{0.9321}$$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg \left(\dfrac{8.753 \times 0.02203}{0.9321}\right)$

$= \lg 8.753 + \lg 0.02203 - \lg 0.9321$

$= 0.9421 + \bar{2}.3430 - \bar{1}.9694$

$= 0.9421 - 2 + 0.3430 - \bar{1}.9694$

$= \bar{1}.2851 - \bar{1}.9694$

$= -1 + 0.2851 - (-1 + 0.9694)$

$= -1 + 0.2851 + 1 - 0.9694$

$= \bar{1}.3157$

$\therefore \quad P = \text{antilog } \bar{1}.3157$

$= 0.2068$

சுட்டி வடித்தில் சுருக்கல்

$$\frac{8.753 \times 0.02203}{0.9321}$$

$$= \frac{10^{0.9421} \times 10^{\bar{2}.3430}}{10^{\bar{1}.9694}}$$

$$= \frac{10^{\bar{1}.2851}}{10^{\bar{1}.9694}}$$

$$= 10^{\bar{1}.2851 - \bar{1}.9694}$$

$$= 10^{\bar{1}.3157}$$

$$= 2.068 \times 10^{\bar{1}}$$

$$= 0.2068$$

பயிற்சி 3.4

1. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பெறுமானம் காண்க.

A.

a. 5.945×0.782 **b.** 0.7453×0.05921 **c.** 0.0085×0.0943

d. $5.21 \times 0.752 \times 0.093$ **e.** $857 \times 0.008321 \times 0.457$ **f.** $0.123 \times 0.9857 \times 0.79$

B.

a. $7.543 \div 0.9524$ **b.** $0.0752 \div 0.8143$ **c.** $0.005273 \div 0.0078$

d. $0.9347 \div 8.75$ **e.** $0.0631 \div 0.003921$ **f.** $0.0752 \div 0.0008531$

C.

a. $\dfrac{8.247 \times 0.1973}{0.9875}$ **b.** $\dfrac{9.752 \times 0.0054}{0.09534}$ **c.** $\dfrac{79.25 \times 0.0043}{0.3725}$

d. $\dfrac{0.7135 \times 0.4391}{0.0059}$ **e.** $\dfrac{5.378 \times 0.9376}{0.0731 \times 0.471}$ **f.** $\dfrac{71.8 \times 0.7823}{23.19 \times 0.0932}$

3.5 ஓர் எண்ணின் மடக்கையை முழு எண்ணால் பெருக்கலும் வகுத்தலும்

ஒன்றிலும் கூடிய எண்களின் மடக்கைகளின் சிறப்பியல்பானது நேர்ப் பெறுமானத்தை எடுக்கும் என்பதை நாம் அறிவோம். அவ்வாறான மடக்கையை இன்னோர் எண்ணினால் பெருக்கும்போது அல்லது வகுக்கும்போது சாதாரண முறையில் சுருக்கலாம். ஆயினும் 0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே உள்ள எண்களின் மடக்கைளின் சிறப்பியல்பு ஒரு மறைப் பெறுமானத்தை எடுக்கின்றது என்பதை நாம் அறிவோம். $\overline{3}.8247$ அத்தகைய ஒரு மடக்கை ஆகும். இத்தகைய பிரிகோடு இடம்பெறும் ஒரு மடக்கையை வேறோர் எண்ணினால் பெருக்கும்போது அல்லது வகுக்கும்போது சிறப்பியல்பு, தசமக்கூட்டுப் பகுதிகளை வேறுவேறாகச் சுருக்க வேண்டும்.

மடக்கையை முழு எண்ணால் பெருக்கல்

உதாரணம் 1

சுருக்குக.

a. 2.8111×2 **b.** $\overline{2}.7512 \times 3$ **c.** $\overline{1}.9217 \times 3$

a.
$$2.8111 \times 2$$
$$= 5.6222$$

b.
$$\overline{2}.7512 \times 3$$
$$= 3(-2 + 0.7512)$$
$$= -6 + 2.2536$$
$$= -6 + 2 + 0.2536$$
$$= -4 + 0.2536$$
$$= \overline{4}.2536$$

c.
$$\overline{1}.9217 \times 3$$
$$3(-1 + 0.9217)$$
$$= -3 + 2.7651$$
$$= -3 + 2 + 0.7651$$
$$= -1 + 0.7651$$
$$= \overline{1}.7651$$

மடக்கையை ஒரு முழு எண்ணால் வகுத்தல்

மடக்கைகளை ஒரு முழு எண்ணால் வகுக்கும் விதம் பற்றி இப்போது கருதுவோம். சிறப்பியல்பு பிரிகோட்டைக் கொண்டிருக்கும் மடக்கையை முழு எண்ணால் வகுக்கும்போது சிறப்பியல்பு, தசமக்கூட்டு ஆகிய இரு பகுதிகளும் மறை, நேர்ப் பெறுமானங்கள் இருக்கின்றமையால் வகுக்கும்போது மறைப் பகுதியையும் நேர்ப் பகுதியையும் வேறுவேறாக வகுத்தல் வேண்டும். அத்தகைய சில சந்தர்ப்பங்கள் பற்றி இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணம் 2

சுருக்குக.

a. $2.5142 \div 2$ **b.** $\bar{3}.5001 \div 3$ **c.** $\bar{4}.8322 \div 2$

$(-3 + 0.5001) \div 3$ $(-4 + 0.8322) \div 2$

a	b	c
$2.5142 \div 2$ $= 1.2571$	$\bar{3} \div 3 = \bar{1}$ $0.5001 \div 3 = 0.1667$ $\therefore \bar{3}.5001 \div 3$ $= \bar{1}.1667$	$\bar{4} \div 2 = \bar{2}$ $0.8322 \div 2 = 0.4161$ $\therefore \bar{4}.8322 \div 2$ $= \bar{2}.4161$

மேற்குறித்த உதாரணத்தில் உள்ள மடக்கைகளின் சிறப்பியல்பை மீதியின்றி வகுத்தோம். சிறப்பியல்பை மீதியுடன் வகுத்தால், அது வகுக்கப்படும் விதம் பற்றிப் பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 3

சுருக்குக.

a. $\bar{1}.5412 \div 2$ **b.** $\bar{2}.3713 \div 3$ **c.** $\bar{3}.5112 \div 2$

a. $\bar{1}.5412 \div 2$ என்பதை $(-1 + 0.5412) \div 2$ எனக் கொள்வோம்.

சிறப்பியல்பு $\bar{1}$ ஆனது 2 இனால் செப்பமாக வகுக்கப்படாமையால், அதனை $\bar{2} + 1$ என அமைக்கலாம்.

$$\bar{1}.5412 \div 2 = (-1 + 0.5412) \div 2$$
$$= (-2 + 1 + 0.5412) \div 2$$
$$= (-2 + 1.5412) \div 2$$
$$= \bar{1}.7706$$

b.
$$\bar{1}.3713 \div 3 = (-1 + 0.3712) \div 3$$
$$= (-1 + 2 + 0.3712) \div 3 \quad (-1 = -3 + 2 \text{ ஆகையால்})$$
$$= (\bar{3} + 2.3712) \div 3$$
$$= \bar{1}.7904$$

c.
$$\bar{3}.5112 \div 2 = (-3 + 0.5112) \div 2$$
$$= (-4 + 1 + 0.5112) \div 2$$
$$= \bar{2} + 1.5112 \div 2 \quad (-3 = -4 + 1 \text{ ஆகையால்})$$
$$= \bar{2}.7556$$

மடக்கை அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்திச் செய்யும் சுருக்கலில் இப்பெருக்கல்களும் வகுத்தல்களும் முக்கியமானவை ஆகையால், அவ்வறிவை விருத்தி செய்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

பயிற்சி 3.5

1. பெறுமானங் காண்க.

a. $\overline{1}.5413 \times 2$ **b.** $\overline{2}.7321 \times 3$ **c.** 1.7315×3

d. 0.4882×3 **e.** $\overline{3}.5111 \times 2$ **f.** $\overline{3}.8111 \times 4$

2. பெறுமானங் காண்க.

a. $1.9412 \div 2$ **b.** $0.5512 \div 2$ **c.** $\overline{2}.4312 \div 2$

d. $\overline{3}.5412 \div 3$ **e.** $\overline{2}.4712 \div 2$ **f.** $\overline{4}.5321 \div 2$

g. $\overline{1}.5432 \div 2$ **h.** $\overline{2}.9312 \div 3$ **i.** $\overline{3}.4112 \div 2$

j. $\overline{1}.7512 \div 3$ **k.** $\overline{4}.1012 \div 3$ **l.** $\overline{5}.1421 \div 3$

3.6 மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி எண்ணின் வலுவையும் மூலத்தையும் காணல்

$\log_2 5^3 = 3 \log_2 5$ அது முன்னர் நாம் கற்ற ஒரு மடக்கை விதியாகிய $\log_a m^r = r \log_a m$ மூலம் கிடைக்கின்றது என்பதை நாம் அறிவோம்.

அவ்வாறே மூலம் உள்ள ஒரு எண்ணின் மடக்கையை மடக்கை விதியின் கீழ் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

(i) $\log_a \sqrt{5} = \log_a 5^{\frac{1}{2}}$ $(\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ ஆகையால்)

$= \frac{1}{2} \log_a 5$ (மடக்கை விதியைப் பயன்படுத்தல்)

(ii) $\lg \sqrt{25} = \lg 25^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \lg 25$

இதற்கேற்ப மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி ஓர் எண்ணின் வலுவையும் மூலத்தையும் பெறும் விதம் பற்றிப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

பெறுமானங் காண்க.

a. 354^2 **b.** 0.0275^3 **c.** 0.9073^4

a. $P = 354^2$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg 354^2$

$= 2 \lg 354$

$= 2 \lg (3.54 \times 10^2)$

$= 2 \times 2.5490$

$= 5.0980$

$\therefore \quad P = \text{antilog } 5.0980$

$= 1.253 \times 10^5$

$= 125\,300$

b. $P = 0.0275^3$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg 0.0275^3$

$= 3 \lg 0.0275$

$= 3 \times \bar{2}.4393$

$= 3 \times (-2 + 0.4393)$

$= -6 + 1.3179$

$= -6 + 1 + 0.3179$

$= -5 + 0.3179$

$= \bar{5}.3179$

$\therefore \quad P = \text{antilog } \bar{5}.3179$

$= 2.079 \times 10^{-5}$

$= 0.00002079$

c. $P = 0.9073^4$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg 0.9073^4$

$= 4 \lg 0.9073$

$= 4 \times \bar{1}.9577$

$= 4 \times (-1 + 0.9577)$

$= -4 + 3.8308$

$= -4 + 3 + 0.8308$

$= -1 + 0.8308$

$= \bar{1}.8308$

$\therefore P = \text{antilog } \bar{1}.8308$

$= 6.773 \times 10^{-1}$

$= 0.6773$

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்

$0.9073^4 = \left(10^{\bar{1}.9577}\right)^4$

$= 10^{\bar{1}.9577 \times 4}$

$= 10^{-1.8308}$

$= 6.773 \times 10^{-1}$

$= 0.6773$

உதாரணம் 2

பெறுமானங் காண்க. **a.** $\sqrt{8.75}$ **b.** $\sqrt[3]{0.9371}$ **c.** $\sqrt[3]{0.0549}$

a. $P = \sqrt{8.75}$ எனக் கொள்வோம்.

$$P = \sqrt{8.75}$$
$$P = 8.75^{\frac{1}{2}}$$

அப்போது $\lg P = \lg 8.75^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2} \lg 8.75$$
$$= \frac{1}{2} \times 0.9420$$
$$= 0.4710$$
$$\therefore \quad P = \text{antilog } 0.4710$$
$$= 2.958$$

b. $P = \sqrt[3]{0.9371}$ எனக் கொள்வோம்.

$$P = \sqrt[3]{0.9371}$$
$$= 0.9371^{\frac{1}{3}}$$

அப்போது $\lg P = \lg 0.9371^{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{1}{3} \lg 0.9371$$
$$= \frac{1}{3} \times \bar{1}.9717$$
$$= (\bar{1}.9717) \div 3$$
$$= (-1 + 0.9717) \div 3$$
$$= (-3 + 2 + 0.9717) \div 3$$
$$= (-3 + 2.9717) \div 3$$
$$= -1 + 0.9906$$
$$= \bar{1}.9906$$
$$\therefore \quad P = \text{antilog } \bar{1}.9906$$
$$= 0.9786$$

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்

$$\sqrt[3]{0.9371} = 0.9371^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(10^{\bar{1}.9717}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 10^{\bar{1}.9717 \times \frac{1}{3}}$$
$$= 10^{\bar{1}.9906}$$
$$= 9.786 \times 10^{-1}$$
$$= 0.9786$$

c. $P = \sqrt[3]{0.0549}$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது
$$\begin{aligned}
\lg P &= \lg 0.0549^{\frac{1}{3}}\\
&= \frac{1}{3}\lg 0.0549\\
&= \frac{1}{3}\times \overline{2}.7396\\
&= (\overline{2}.7396)\div 3\\
&= (-2+0.7396)\div 3\\
&= (-3+1+0.7396)\div 3\\
&= (-3+1.7396)\div 3\\
&= -1+0.5799\\
&= \overline{1}.5799\\
\therefore\ P &= \text{antilog}\ \overline{1}.5799\\
&= 0.3801
\end{aligned}$$

> சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்
>
> $$\begin{aligned}
\sqrt[3]{0.0549} &= 0.0549^{\frac{1}{3}}\\
&= \left(10^{\overline{2}.7396}\right)^{\frac{1}{3}}\\
&= 10^{\overline{2}.7396\times\frac{1}{3}}\\
&= 10^{\overline{1}.5799}\\
&= 3.801\times 10^{-1}\\
&= 0.3801
\end{aligned}$$

இப்போது பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

பயிற்சி 3.6

1. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பெறுமானங் காண்க.

a. $(5.97)^2$ **b.** $(27.85)^3$ **c.** $(82.1)^3$

d. $(0.752)^2$ **e.** $(0.9812)^3$ **f.** $(0.0593)^2$

2. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பெறுமானங் காண்க.

a. $\sqrt{25.1}$ **b.** $\sqrt{947.5}$ **c.** $\sqrt{0.0714}$

d. $\sqrt[3]{0.00913}$ **e.** $\sqrt[3]{0.7519}$ **f.** $\sqrt{0.999}$

3.7 வலுவும் மூலமும் இடம் பெறும் கோவைகளை மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கல்

வலு, மூலம், பெருக்கல், வகுத்தல் என்னும் கணிதச் செய்கைகள் எல்லாம் (அல்லது சில) இடம்பெறும் ஒரு கோவையை மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கும் விதம் பின்வரும் உதாரணத்தில் காணப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. விடையைக் கிட்டிய முதலாம் தசமதானத்திற்கு எழுதுக.

a. $\dfrac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{0.4537} \times 75.4}{0.987^2}$

a. $P = \dfrac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}}$ எனக் கொள்வோம்.

$$
\begin{aligned}
\text{அப்போது } \lg P &= \lg\left(\frac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}}\right)\\
&= \lg 7.543 + \lg 0.987^2 - \lg 0.875^{\frac{1}{2}}\\
&= \lg 7.543 + 2 \lg 0.987 - \frac{1}{2} \times \bar{1}.9420\\
&= 0.8776 + 2 \times \bar{1}.9943 - \frac{\bar{2} + 1.9420}{2}\\
&= 0.8776 + \bar{1}.9886 - (\bar{1} + 0.9710)\\
&= 0.8776 + \bar{1}.9886 - \bar{1}.9710\\
&= 0.8662 - \bar{1}.9710\\
&= 0.8952\\
\therefore P &= \text{antilog } 0.8952\\
&= 7.855
\end{aligned}
$$

$$\therefore \frac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}} \approx 7.9 \text{ (கிட்டிய முதலாம் தசமதானதிற்கு)}$$

சுட்டி வடித்தில் சுருக்கல்

$$
\begin{aligned}
\frac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}} &= \frac{7.543 \times 0.987^2}{0.875^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{10^{0.8776} \times \left(10^{\bar{1}.9943}\right)^2}{\left(10^{\bar{1}.9420}\right)^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{10^{0.8776} \times 10^{\bar{1}.9886}}{10^{\bar{1}.9710}}\\
&= \frac{10^{0.8662}}{10^{\bar{1}.9710}}\\
&= 10^{0.8662 - \bar{1}.9710}\\
&= 10^{0.8952}
\end{aligned}
$$

$$= 7.855 \times 10^0$$
$$= 7.855$$
$$\approx 7.9$$

b. $P = \dfrac{\sqrt{0.4537} \times 75.4}{0.987^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\lg P = \lg \left(\frac{0.4537^{\frac{1}{2}} \times 75.4}{0.987^2} \right)$$
$$= \lg 0.4537^{\frac{1}{2}} + \lg 75.4 - \lg 0.987^2$$
$$= \frac{1}{2} \lg 0.4537 + \lg 75.4 - 2 \lg 0.987$$
$$= \frac{1}{2} \times \bar{1}.6568 + 1.8774 - 2 \times \bar{1}.9943$$
$$= \bar{1}.8284 + 1.8774 - \bar{1}.9886$$
$$= 1.7058 - \bar{1}.9886$$
$$= 1.7172$$
$$P = \text{antilog } 1.7172$$
$$\approx 52.15$$

$$\frac{\sqrt{0.4537} \times 75.4}{0.987^2} = 52.2$$ (கிட்டிய முதலாவது தசம தானத்திற்கு)

சுட்டி வடிவத்தில் சுருக்கல்

$$\frac{\sqrt{0.4537} \times 75.4}{0.987^2} = \left(\frac{0.4537^{\frac{1}{2}} \times 75.4}{0.987^2} \right)$$
$$= \frac{\left(10^{\bar{1}.6568}\right)^{\frac{1}{2}} \times 10^{1.8774}}{\left(10^{\bar{1}.9943}\right)^2}$$
$$= \frac{10^{\bar{1}.8284} \times 10^{1.8774}}{10^{\bar{1}.9886}}$$
$$= 10^{1.7058 - \bar{1}.9886}$$
$$= 10^{1.7172}$$
$$= 52.15$$
$$\approx 52.2$$

பயிற்சி 3.7

1. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

a. $\dfrac{8.765 \times \sqrt[3]{27.03}}{24.51}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{9.18} \times 8.02^2}{9.83}$ **c.** $\dfrac{\sqrt{0.0945} \times 4.821^2}{48.15}$

d. $\dfrac{3 \times 0.752^2}{\sqrt{17.96}}$ **e.** $\dfrac{6.591 \times \sqrt[3]{0.0782}}{0.9821^2}$ **f.** $\dfrac{3.251 \times \sqrt[3]{0.0234}}{0.8915}$

3.8 மடக்கை அட்டவணையின் பயன்பாடு

எண்களைப் பெருக்கலும் வகுத்தலும் இடம்பெறும் பெரும்பாலான பிரசினங்களைச் சுருக்கல் மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் எளிதாக்கப்படும் அத்தகைய ஓர் உதாரணம் கீழே காணப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

ஒரு கோளத்தின் கனவளவு V ஆனது சூத்திரம் $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ இனால் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு $\pi = 3.142$, $r = 0.64$ cm எனின், மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கோளத்தின் கனவளவைக் கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்திற்குக் காண்க.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3} \times 3.142 \times 0.64^3 \\
\lg V &= \lg\left(\frac{4}{3} \times 3.142 \times 0.64^3\right) \\
&= \lg 4 + \lg 3.142 + 3 \lg 0.64 - \lg 3 \\
&= 0.6021 + 0.4972 + 3 \times \bar{1}.8062 - 0.4771 \\
&= 0.6021 + 0.4972 + \bar{1}.4186 - 0.4771 \\
&= 0.5179 - 0.4771 \\
&= 0.0408 \\
\therefore \quad V &= \text{antilog } 0.0408 \\
&= 1.098 \\
&\approx 1.1 \quad \text{(முதலாந் தசம தானத்திற்கு)}
\end{aligned}$$

$\therefore$ கோளத்தின் கனவளவு 1.1 cm^3 ஆகும்.

மேற்குறித்தவாறு மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பெருக்கலும் வகுத்தலும் இடம்பெறும் கோவைகளை எளிதாகச் சுருக்கலாம் என்பதை அறிந்து கொண்டீர்கள். அத்தகைய சில பிரசினங்கள் பின்வரும் பயிற்சியில் இடம்பெறுகின்றன.

பயிற்சி 3.8

1. 1 கன சென்ரிமீற்றர் இரும்பின் திணிவு 7.76 g ஆகும். நீளம், அகலம், தடிப்பு ஆகியன முறையே 5.4 m, 0.36 m, 0.22 m ஆகவுள்ள ஒரு கனவுரு இரும்பு வளையின் திணிவைக் கிட்டிய kg இற்குக் காண்க.

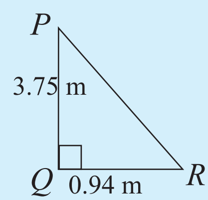
2. சூத்திரம் $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$ இல் $\pi = 3.142$, $l = 1.75$, $T = 7.5$ எனின், g யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. 0.75 m ஆரையுள்ள ஒரு மெல்லிய வட்ட உலோகத் தகட்டிலிருந்து 0.07 m ஆரையுள்ள ஒரு வட்டப் பகுதி வெட்டி நீக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) மீதிப் பகுதியின் பரப்பளவை $\pi \times 0.82 \times 0.68$ எனக் காட்டுக.

(ii) $\pi = 3.142$ எனக் கொண்டு எஞ்சிய பகுதியின் பரப்பளவை மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

4. ஒரு செங்கோண முக்கோண நிலப் பகுதி உருவில் காணப் படுகின்றது. அதில் செங்கோணத்தை உள்ளடக்கிய பக்கங் களின் நீளங்கள் 3.75 m , 0.94 m எனின், *PR* இன் நீளத்தைக் கிட்டிய மீற்றருக்குக் காண்க.



3.9 கணிகருவியின் பயன்பாடுகள்

நெடுங்காலமாகச் சிக்கலான கணிப்புகளுக்கு மடக்கைகள் பயன்படுத்தப்பட்டன. எனினும் இன்று அப்பணி பெரும்பாலும் கணிகருவியினால் (calculator) மேற்கொள்ளப்படுகின்றது. சாதாரண கணிகருவியைப் பயன்படுத்திச் செய்யத்தக்க கணிப்புகள் மட்டுப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. சிக்கலான கணிப்புகளுக்கு விஞ்ஞானக் கணிகருவி பயன்படுத்தப்படுகின்றது. விஞ்ஞானக் கணிகருவியின் சாவிப்பலகை சாதாரண கணிகருவியிலும் பார்க்கச் சிக்கலானது.

கணிகருவியின் மூலம் வலுவின் பெறுமானத்தைப் பெறுதல்

521^3 இன் பெறுமானம் கணிகருவியின் மூலம் $521 \times 521 \times 521$ எனச் சாவிப் பலகையைத் தொழிற்படுத்துவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது. எனினும் விஞ்ஞானக் கணிகருவியின் மூலம் x^n வலுவைக் காட்டும் சாவியைப் பயன்படுத்தி $\boxed{x}$, $\boxed{\wedge}$, $\boxed{n}$ என்னும் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்துவதன் மூலம் எளிதாக ஒரே தடவையில் 521^3 இன் பெறுமானதைக் காணலாம்.

உதாரணம் 1

275^3 இன் பெறுமானத்தைக் கணிகருவியின் மூலம் காண்க. காண்பதற்குத் தொழிற்படுத்தும் சாவிகளை முறையே பாய்ச்சற் கோட்டுப் படத்திற் காட்டுக.

$\boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{x^n}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$ அல்லது $\boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$ 20 796 875

கணிகருவியைப் பயன்படுத்தி மூலத்தின் பெறுமானத்தைப் பெறுதல்

சாவிப் பலகையின் $\boxed{\text{shift}}$ சாவி மூலத்தைப் பெற அவசியமானதாகும். அதற்கு மேலதிகமாக $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ சாவியையும் $\boxed{n}$ சாவியையும் தொழிற்படுத்த வேண்டும்.

உதாரணம் 1

$\sqrt[4]{2313\ 441}$ பெறுமானத்தைக் கணிகருவியின் மூலம் பெறுவற்குத் தொழிற்படுத்தப்படும் சாவிகளை முறையே பாய்ச்சற் கோட்டுப் படத்திற் காட்டுக.

$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{1}\ \boxed{\text{shift}}\ \boxed{x^n}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

அல்லது

$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{1}\ \boxed{x^{1/n}}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$ 39

அல்லது

$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{1}\ \boxed{\sqrt[n]{x}}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

வலுவும் மூலமும் இடம்பெறும் கோவையைச் சுருக்குவதற்குக் கணிகருவியைப் பயன்படுத்தல்

$\dfrac{5.21^3 \times \sqrt[3]{4.3}}{3275}$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்கு விஞ்ஞானக் கணிகருவியில் தொழிற்படுத்தப்படும் சாவிகளை முறையே பாய்ச்சற் கோட்டுப் படத்தில் காட்டுக.

$\boxed{5}\ \boxed{.}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{x^n}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{.}\ \boxed{3}\ \boxed{x^{1/n}}\ \boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$ 0.070219546

பயிற்சி 3.9

1. பின்வரும் பெறுமானங்கள் ஒவ்வொன்றையும் கணிப்பதற்கு விஞ்ஞானக் கணிகருவியில் தொழிற்படுத்தப்படும் சாவிகளை முறையே பாய்ச்சற் கோட்டுப்படத்தில் காட்டுக.

a. 952^2

b. $\sqrt{475}$

c. 5.85^3

d. $\sqrt[3]{275.1}$

e. $375^2 \times \sqrt{52}$

f. $\sqrt{4229} \times 352^2$

g. $\dfrac{37^2 \times 853}{\sqrt{50}}$

h. $\dfrac{\sqrt{751} \times 85^2}{\sqrt[3]{36}}$

i. $\dfrac{\sqrt{1452} \times 38.75}{98.2}$

j. $\dfrac{\sqrt[3]{827.3} \times 5.41^2}{9.74}$

பலவினப் பயிற்சி

1. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக. விடையின் செம்மையைக் கணிகருவியின் மூலம் வாய்ப்புப் பார்க்க.

(i) $\dfrac{1}{275.2}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{982.1}}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{0.954}}$ (iv) $0.5678^{\frac{1}{3}}$

(v) $0.785^2 - 0.0072^2$ (vi) $9.84^2 + 51.2^2$

2. $a = 0.8732$, $b = 3.168$ ஆக இருக்கும்போது

(i) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(ii) $(ab)^2$

ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. சூத்திரம் $A = p\ (1 + \dfrac{r}{100}\ )^n$ இல் $P = 675, r = 3.5$, $n = 3$ ஆக இருக்கும்போது A இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. ஒரு மெல்லிய வட்ட உலோகத் தகட்டிலிருந்து மையக் கோணம் 73° ஆகவுள்ள ஓர் ஆரைச்சிறை வெட்டி நீக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு வட்டத்தின் பரப்பளவின் என்ன பின்னமாகும்?

(ii) வட்டத் தகட்டின் ஆரை 17.8 cm எனின், ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவைக் காண்க.

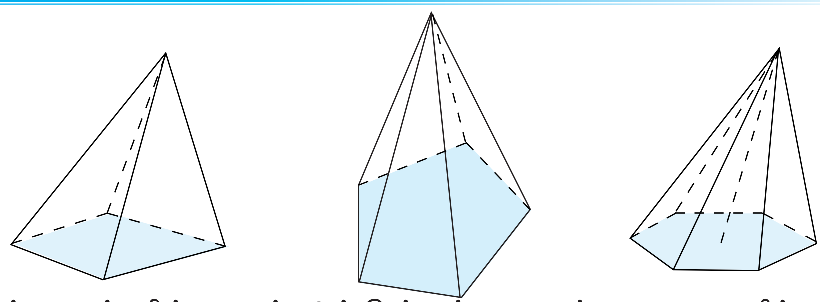
4 திண்மங்களின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- ஒரு செங்கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் கணிப்பதற்கும்
- ஒரு செங்கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் கணிப்பதற்கும்
- ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் கணிப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

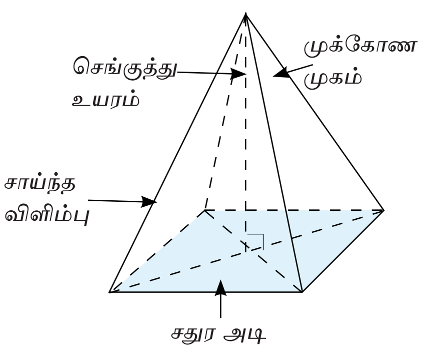
கூம்பகம்



மேற்குறித்த உருக்களில் காணப்படும் திண்மங்களை நன்றாக அவதானிக்க. அவற்றின் முகங்களாகப் பல்கோணிகள் உள்ளன. இம்முகங்களில் ஒன்றைத் தவிர மற்றையவை முக்கோண வடிவமானவை ஆகும். முக்கோண வடிவமல்லாத முகம் கூம்பகத்தின் அடி எனப்படும். அடியாக அமையாத முகங்கள் எல்லாம் முக்கோணிகள் ஆகும். அம்முக்கோண முகங்கள் எல்லாவற்றுக்கும் பொதுவான ஒரு புள்ளி இருக்கும் அதே வேளை அப்பொதுப் புள்ளி உச்சி எனப்படும். இவ்வியல்புகளை உடைய திண்மம் **கூம்பகம்** எனப்படும்.

உருவில் உள்ள மூன்று கூம்பகங்களினதும் அடிகள் முறையே நாற்பக்கல், ஐங்கோணி, அறுகோணி ஆகும்.

அடி சதுரமாகவுள்ள செங்கூம்பகம்



உருவில் காணப்படும் கூம்பகத்தின் அடி சதுரம் ஆகும். எஞ்சியுள்ள நான்கு முகங்களும் முக்கோணிகள் ஆகும்.

சதுர அடியின் நடுப்புள்ளியை (அதாவது சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளி) கூம்பகத்தின் உச்சியுடன் தொடுக்கும் கோட்டுத் துண்டம் அடிக்குச் செங்குத்தானது எனின், அப்போது இக்கூம்பகம் **சதுரச் செங்கூம்பகம்** எனப்படும். அக்கோட்டுத் துண்டத்தின் நீளம் செங்குத்து உயரம்

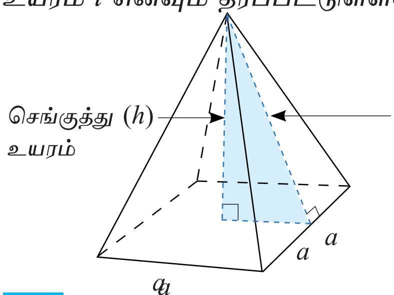
(அல்லது மேலும் எளிதாக உயரம்) எனப்படும். அடியின் பக்கங்களாக அமையாத விளிம்புகள் சாய்ந்த விளிம்புகள் எனப்படும். நாம் இப்பாடத்தில் சதுரக் கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காணல் பற்றி மாத்திரம் கருதுவோம்.

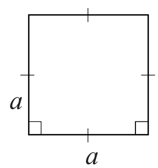
குறிப்பு: நான்முகியையும் கூம்பகமாகக் கருதலாம். இங்கு சகல முகங்களும் முக்கோண வடிவமானவை ஒரு நான்முகியின் அடியாக எந்தவொரு முகத்தையும் கருதலாம். செங்கூம்பகம் என்பது அடி சதுரமாக அமையாத போதும் கூம்பகமாக வரையறுக்கப்படலாம். ஓர் உதாரணமாக அடி எந்த ஒழுங்கான பல்கோணி வடிவத்தையும் எடுக்கும்போது செங்கூம்பகம் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும். அவ்வொழுங்கான பல்கோணியின் சமச்சீர்க் கோடுகள் எல்லாம் செல்லும் ஒரு பொதுப் புள்ளி இருக்கும் அதே வேளை அப்பொதுப் புள்ளியைக் கூம்பகத்தின் உச்சியுடன் தொடுக்கும் கோட்டுத் துண்டம் அடிக்குச் செங்குத்தானதெனின், அக்கூம்பகம் **செங்கூம்பகம்** எனப்படும். அடி ஒழுங்கான பல்கோணி வடிவத்தை எடுக்கும்போது அந்த அடியின் நடுவாக அப்பல்கோணியின் மையப்போலியை எடுக்கலாம். கணிதத்தை மேல் வகுப்புகளில் கற்கும்போது மையப்போலி பற்றிய எண்ணக்கருவை கற்பீர்கள்.

சதுரச் செங்கூம்பகத்தில் எல்லா முக்கோண முகங்களும் ஒருங்கிசைதல் ஒரு முக்கிய இயல்பாகும். ஆகவே அம்முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகளும் சமம். மேலும் இம்முக்கோணிகள் இருசமபக்க முக்கோணிகள் ஆகும்.
அதாவது, அம்முக்கோண முகங்கள் எல்லாவற்றினதும் ஒரு பக்கம் சதுர அடியின் ஒரு பக்கமாக இருக்கும் அதே வேளை இரு எஞ்சிய பக்கங்களும் நீளத்தில் சமம்.

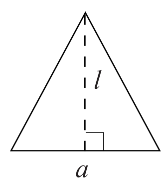
4.1 அடி சதுரமாக உள்ள செங்கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

அடி சதுரமாக உள்ள ஒரு செங்கூம்பகத்தின் அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தையும் ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரத்தையும் கொண்டு அதன் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கு அடியின் பரப்பளவையும் நான்கு முக்கோண முகங்களின் பரப்பளவுகளையும் கண்டு அவை எல்லாவற்றினதும் கூட்டுத்தொகையை எடுத்தல் வேண்டும். சதுர அடியின் ஒரு பக்க நீளமும் செங்குத்து உயரமும் தரப்படும்போது அதன் மேற்பரப்பளவைக் காண்பதில் கவனம் செலுத்துவோம்.
சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a எனவும் ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் l எனவும் தரப்பட்டுள்ளனவெனக் கொள்வோம்.





சதுர வடிவான அடி



4 முக்கோண முகங்கள்

இதற்கேற்ப மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

$$\left.\begin{array}{l}\text{சதுரக் கூம்பகத்தின்}\\ \text{மொத்த மேற்பரப்பின்}\\ \text{பரப்பளவு}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{சதுர அடியின்}\\ \text{பரப்பளவு}\end{array}\right\} + 4 \times \left\{\begin{array}{c}\text{முக்கோண}\\ \text{முகத்தின்}\\ \text{பரப்பளவு}\end{array}\right\}$$

$$= a \times a + 4 \times \frac{1}{2} a \times l$$

$$= a^2 + 2al$$

$$\boxed{A = a^2 + 2al}$$

சதுரச் செங்கூம்பகம் ஒன்றின் மேற்பரப்பளவு தொடர்பான சில பிரசினங்களில் இப்போது எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

உதாரணம் 1

சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm ஆகவும் முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் 15 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு சதுரச் செங்கூம்பகத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைச் சதுர சென்ரிமீற்றரில் காண்க.

அடியின் பரப்பளவு $= 10 \times 10$

$= 100$

ஒரு முக்கோண முகத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 10 \times 15$

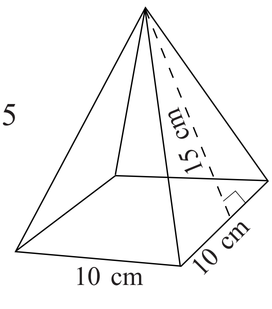
$= 75$

எல்லா முக்கோண முகங்களினதும் பரப்பளவு $= 75 \times 4$

$= 300$

மொத்தப் பரப்பளவு $= 100 + 300$

$= 400$



$\therefore$ மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 400 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

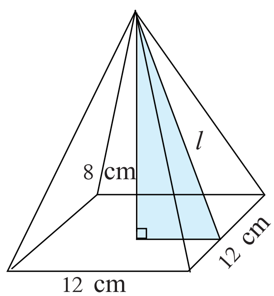
உருவில் காணப்படும் செங்கூம்பகத்தின் சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 12 cm ஆக இருக்கும் அதே வேளை செங்கூம்பகத்தின் செங்குத்து உயரம் 8 cm ஆகும்.

(i) ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம்

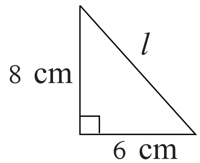
(ii) ஒரு முக்கோண முகத்தின் பரப்பளவு

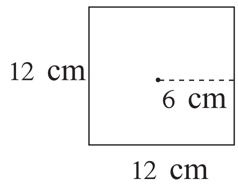
(iii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

ஆகியவற்றைக் காண்க.



ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் l cm எனக் கொள்வோம். தரப்பட்டுள்ள உருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள முக்கோணியைக் கருதுவோம். பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப





(i) $l^2 = 8^2 + 6^2$
$= 64 + 36$
$= 100$
$\therefore l = \sqrt{100}$
$= 10$

$\therefore$ ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் 10 cm ஆகும்.

(ii) ஒரு முக்கோண முகத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 12 \times 10$
$= 60$

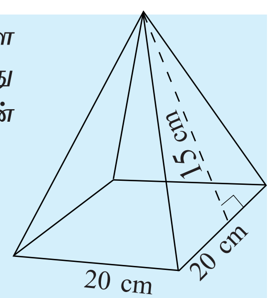
$\therefore$ முக்கோண முகத்தின் பரப்பளவு 60 cm^2 ஆகும்.

(iii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 12 \times 12 + 4 \times 60$
$= 144 + 240$
$= 384$

$\therefore$ மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 384 cm^2 ஆகும்.

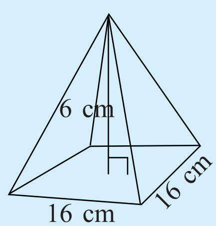
பயிற்சி 4.1

1. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 20 cm ஆகவுள்ள செங்கூம்பகம் ஒன்றின் ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் 15 cm எனின், கூம்பகத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.



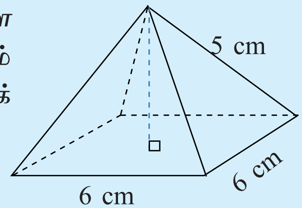
2. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 8 cm ஆகவுள்ள செங்கூம்பகம் ஒன்றின் ஒரு முக்கோண மேற்பரப்பின் செங்குத்து உயரம் 20 cm எனின் கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

3. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 16 cm ஆகவுள்ள செங்கூம்பகம் ஒன்றின் செங்குத்து உயரம் 6 cm ஆகும்.
(i) ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம்
(ii) கூம்பகத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு
ஆகியவற்றைக் காண்க.



4. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 20 cm ஆகவும் ஒரு செங்கூம்பகத்தின் செங்குத்து உயரம் 12 cm ஆகவும் இருப்பின், கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

5. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 6 cm ஆகவுள்ள செங்கூம்பகம் ஒன்றின் ஒரு சாய்ந்த விளிம்பின் நீளம் 5 cm எனின் கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.



6. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுர அடியை உடைய செங்கூம்பகம் ஒன்றின் சாய்ந்த விளிம்பின் நீளம் 13 cm எனின் அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

7. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 30 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுர அடியைக் கொண்ட செங்கூம்பகம் ஒன்றின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 2 400 cm^2 ஆகும்.

(i) அதன் உச்சியிலிருந்து அடியின் ஒரு பக்கத்திற்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம்

(ii) கூம்பகத்தின் செங்குத்து உயரம்

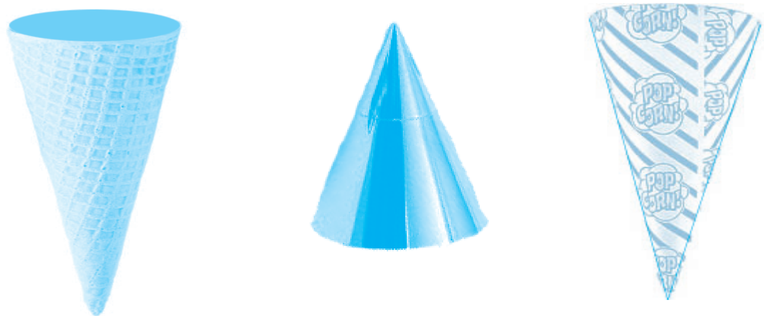
ஆகியவற்றைக் காண்க.

8. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 8 m ஆகவுள்ள ஒரு சதுர அடியைக் கொண்ட செங்கூம்பகக் கூடாரம் ஒன்று செய்யப்பட்டுள்ள துணியின் பரப்பளவு 80 m^2 ஆகும். கூடாரத்தின் அடிக்குத் துணி பயன்படுத்தப்படவில்லை எனக் கொண்டு கூடாரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

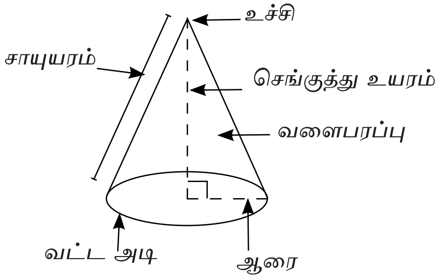
9. செங்குத்து உயரம் 4 m ஆகவும் ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் 5 m ஆகவும் உள்ள சதுர அடியைக் கொண்ட ஒரு கூடாரத்தின் கூரைக்கும் அடிக்கும் துணியை விரிப்பதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டிருப்பின், தேவையான மொத்தத் துணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

10. சதுர அடியின் ஒரு பக்க நீளம் 16 m ஆகவும் செங்குத்து உயரம் 6 m ஆகவும் விளிம்பின் நீளம் 5 m ஆகவும் இருக்குமாறு சதுரச் செங்கூம்பகக் கூடாரம் ஒன்றைச் அமைக்க வேண்டியுள்ளது. இதன் அடியையும் மறைக்கத்தக்கதாகக் கூடாரத்தை அமைப்பதற்குத் தேவையான துணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

கூம்பு



கூம்பு வடிவமுள்ள சில பொருள்கள் மேலே காணப்படுகின்றன. ஒரு கூம்புக்கு வட்டத் தளப் பரப்பு ஒன்றும் வளைபரப்பு ஒன்றும் இருப்பதை அவதானிக்கலாம். வட்டத் தளப் பரப்பு கூம்பின் அடி எனவும் வளைபரப்பின் மீது வரையப்பட்டுள்ள எல்லா நேர்கோடுகளும் செல்லும் புள்ளி கூம்பின் உச்சி எனவும் அழைக்கப்படும்.



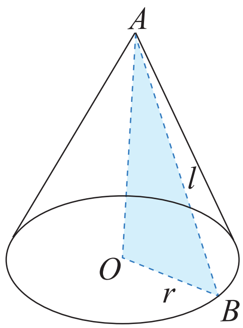
ஒரு கூம்பின் வட்ட அடியின் மையத்தை உச்சியுடன் இணைக்கும்போது கிடைக்கும் கோட்டுத் துண்டம் அடிக்குச் செங்குத்தானதெனின், அது **செவ்வட்டக் கூம்பு** எனப்படும். ஒரு கூம்பின் வட்ட அடியின் ஆரை கூம்பின் ஆரை எனவும் அடி வட்டத்தின் மையத்திற்கும் உச்சிக்குமிடையே உள்ள தூரம் கூம்பின் செங்குத்து உயரம் எனவும் அழைக்கப்படும். மேலும் கூம்பின் உச்சிக்கும் அடி வட்டத்தின் பரிதி மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளிக்குமிடையே உள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டம் சாய்ந்த விளிம்பு எனவும் அக்கோட்டுத் துண்டத்தின் நீளம் கூம்பின் சாயுயரம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

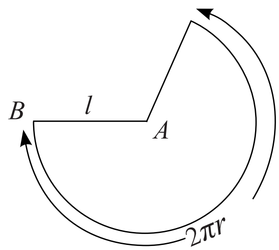
ஒரு கூம்பின் ஆரை r இனாலும் செங்குத்து உயரம் h இனாலும் சாயுயரம் l இனாலும் பொதுவாகக் காட்டப்படும்.

4.2 செவ்வட்டக் கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

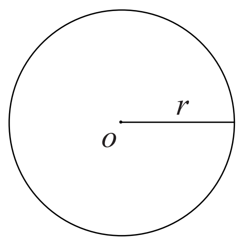
ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கான ஒரு முறையை விவரிப்பதற்கு ஒரு மெல்லிய அடரினால் ஆக்கப்பட்ட ஒரு பொட்கூம்பைக் கருதுவோம். முதலில் அது செய்யப்பட்டுள்ள மேற்பரப்புப் பகுதிகளைப் பார்ப்போம். அடி வட்ட வடிவமுள்ள ஒரு தளப் பரப்பாகும். வளைபரப்பை ஒரு சாய்ந்த கோடு வழியே விரிக்கும்போது ஆரைச்சிறை வடிவமுள்ள ஓர் அடராகும்.

ஒரு கூம்பின் ஆரையும் சாயுயரமும் தரப்படும்போது அதன் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கு வளைபரப்பின் பரப்பளவையும் வட்ட அடியின் பரப்பளவையும் கண்டு அவற்றின் கூட்டுத்தொகையை எடுக்கலாம். சூத்திரம் πr^2 ஐப் பயன்படுத்தி வட்ட அடியின் பரப்பளவைக் கணிக்கலாம். வளைபரப்பின் பரப்பளவைப் பின்வருமாறு கணிக்கலாம்.





வளைந்த
மேற்பரப்புப் பகுதி



வட்ட வடிவ அடி

வளைபரப்பின் பரப்பளவானது அதனை விரிப்பதன் மூலம் பெறப்படும் ஆரைச் சிறையின் பரப்பளவுக்குச் சமம். இந்த ஆரைச்சிறையின் ஆரை l ஆகும். அதன் வில்லின் நீளம் $2\pi r$ ஆகும். (ஏனெனில் அவ்வில்லின் நீளம் அடி வட்டத்தின் பரிதியாகும்). இப்போது இந்த ஆரைச்சிறையின் மையக் கோணம் (தரம் 10 இல் ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவின் கீழ் கற்றவாறு) $\dfrac{360r}{l}$ ஆகும்.

இம்மையக் கோணமுள்ள ஓர் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு (தரம் 10 இல் ஆரைச் சிறையின் பரப்பளவின் கீழ் கற்றவாறு) $\dfrac{\pi l^2}{360} \times \dfrac{360r}{l}$ ஆகும். இதனைச் சுருக்கும்போது πrl கிடைக்கும். ஆகவே கூம்பின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு πrl ஆகும். இதற்கேற்ப

செவ்வட்டக் கூம்பின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= \left\{ \text{கூம்பின் வளை பரப்பின் பரப்பளவு} \right\} + \left\{ \text{வட்ட அடியின் பரப்பளவு} \right\}$

$= \pi rl + \pi r^2$

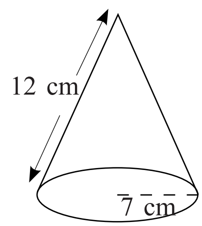
$$\boxed{A = \pi rl + \pi r^2}$$

ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு தொடர்பாகத் தீர்க்கப்பட்ட சில பிரசினங்கள் பற்றி இப்போது எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

இங்கு π இன் பெறுமானம் $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க.

உதாரணம் 1

ஒரு திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பின் வரிப்படம் கீழே காணப்படுகின்றது. அதன் ஆரை 7 cm ஆகவும் சாயுயரம் 12 cm ஆகவும் இருப்பின், கூம்பின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைச் சதுர சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



கூம்பின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 12$

$= 264$

வட்டவடிவத் தளமேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 154$

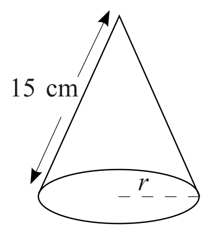
$\therefore$ கூம்பின் மொத்த மேற்பரப்பளவு $= 264 + 154$

$= 418$

$\therefore$ கூம்பின் மேற்பரப்பளவு 418cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

வட்ட அடியின் பரிதி 88 cm ஆகவுள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் சாயுயரம் 15 cm எனின், அதன் வளைபரப்பின் பரப்பளவைச் சதுர சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



வட்ட அடியின் பரிதி $= 88$

அதற்கேற்ப $2\pi r = 88$

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 88$

$r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22}$

$r = 14 \text{ cm}$

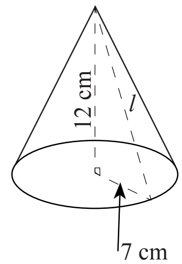
கூம்பின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 15$

$= 660$

$\therefore$ கூம்பின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு 660 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 3



ஆரை 7 cm ஆகவும் செங்குத்து உயரம் 12 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின்
(i) சாயுயரம்
(ii) வளைபரப்பின் பரப்பளவு
(iii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு
ஆகியவற்றை ஒரு தசமதானத்திற்குச் சரியாகக் காண்க.

செவ்வட்டக் கூம்பின் சாயுயரம் l cm எனக் கொள்வோம்.
பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப

(i)
$$l^2 = 7^2 + 12^2$$
$$= 49 + 144$$
$$= 193$$
$$l = \sqrt{193}$$
$$= 13.8$$ (வர்க்க மூலத்தைக் காண்பதற்கான வகுத்தல் முறையின் மூலம்)

$\therefore$ செவ்வட்டக் கூம்பின் சாயுயரம் அண்ணளவாக 13.8 cm ஆகும்.

(ii) வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= \pi r l$
$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 13.8$$
$$= 303.6$$

$\therefore$ வளைபரப்பின் பரப்பளவு 303.6 cm^2 ஆகும்.

(iii) வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \pi r^2$
$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$
$$= 154$$

மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 303.6 + 154$
$$= 457.6$$

$\therefore$ மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 457.6 cm^2 ஆகும்.

பயிற்சி 4.2

1. வட்ட அடியின் ஆரை 14 cm ஆகவும் சாயுயரம் 20 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் வளைபரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

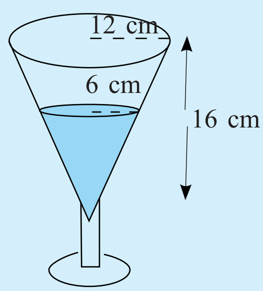
2. வட்ட அடியின் ஆரை 7 cm ஆகவும் உயரம் 24 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பின்
(i) சாயுயரம்
(ii) வளைபரப்பின் பரப்பளவு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. வட்ட அடியின் பரிதி 44 m ஆகவுள்ள ஒரு கூம்பு வடிவ மணற் குவியலின் சாயுயரம் 20 m எனின்
(i) அடியின் ஆரை
(ii) வளைபரப்பின் பரப்பளவு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. வட்ட அடியின் ஆரை 10.5 cm ஆகவும் சாயுயரம் 15 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

5. செவ்வட்டக் கூம்பு வடிவத் திண்மம் ஒன்றின் சாயுயரம் 14 cm ஆகும். அதன் வளைபரப்பின் பரப்பளவு 396 cm^2 எனின்,
(i) கூம்பின் ஆரையைக் கணிக்க.
(ii) செங்குத்து உயரத்தைக் கணிக்க.

6. செவ்வட்டக் கூம்பு வடிவமுள்ள ஒரு மெல்லிய கண்ணாடிப் பாத்திரத்தில் அரைப் பங்குக்குப் பானம் இடப்பட்டுள்ள விதம் உருவில் காணப்படுகின்றது. பாத்திரத்தின் ஆரை 12 cm உம் உயரம் 16 cm உம் ஆகும். பானம் இருக்கும் பகுதியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க



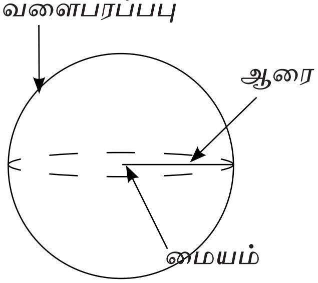
கோளம்


குண்டு


டெனிஸ் பந்து


கால்பந்து

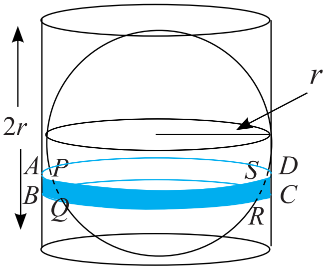
கோளத்தின் பண்புகள் பற்றிய விளக்கம் உங்களிடம் இருக்கும் என்பதில் ஐயமில்லை. கணிதத்தில் ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து மாறாத் தூரத்தில் முப்பரிமாண வெளியில் இருக்கும் புள்ளித் தொடை கோளம் எனப்படும். அந்நிலைத்த புள்ளி கோளத்தின் மையம் எனவும் மாறாத் தூரம் ஆரை எனவும் அழைக்கப்படும். கோளத்திற்கு ஒரு வளைபரப்பு மாத்திரம் இருக்கும் அதே வேளை விளிம்புகளோ உச்சிகளோ இல்லை.



ஒரு கோளத்தின் ஆரை பொதுவாக r இனால் காட்டப்படும்.

4.3 கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் கணிப்பதற்கு உதவும் ஆக்கிமிடீசினால் அவதானிக்கப்பட்ட ஒரு தோற்றப்பாட்டைப் பின்வருமாறு விவரிக்கலாம்.



கோளத்தின் ஆரைக்குச் சமமான ஆரையையும் கோளத்தின் விட்டத்திற்குச் சமமான உயரத்தையும் கொண்ட ஒரு உருளை அக்கோளத்தின் சுற்றுருளை எனப்படும். அக்கோளம் உருளையினுள்ளே இருக்கும்போது உருளையின் வட்டத் தள முகத்திற்குச் சமாந்தரமாக வெட்டப்பட்ட எவையேனும் இரு வெட்டுகளின் மூலம் கோளத்திலிருந்தும் உருளையிலிருந்தும் வெட்டப்படும் பகுதிகளின் வளைபரப்புகளின் பரப்பளவுகள் சமமெனக் கிறீசில் வாழ்ந்த ஆக்கிமிடீஸ் என்ற கணிதவியலாளர் கி.மு. 225 ஆம் ஆண்டளவில் காட்டினார்.

இதற்கேற்ப மேற்குறித்த உருவில் காணப்படும் கோளத்தின் வளைபரப்பின் பகுதி $PQRS$ இன் பரப்பளவு உருளையின் வளைபரப்பின் பகுதி $ABCD$ இன் பரப்பளவுக்குச் சமம்.

ஆகவே ஆக்கிமிடீஸ் எடுத்துரைத்த மேற்குறித்த தொடர்புடைமைக்கேற்பக் கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு சுற்றுருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவுக்குச் சமம்.

சுற்றுருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குச் சூத்திரம் $2\pi rh$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

சுற்றுருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= 2\pi r \times 2r$

$= 4\pi r^2$

எனவே கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 4\pi r^2$

$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$

உதாரணம் 1

7 cm ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைச் சதுர சென்ரிமீற்றரில் காண்க.

கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 616$

$\therefore$ கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 616 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 1386 cm^2 எனின், அதன் ஆரையைக் கணிக்க.

கோளத்தின் ஆரை r cm எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $4\pi r^2 = 1386$

$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 1386$$

$$r^2 = \frac{1386 \times 7}{4 \times 22}$$

$$= \frac{441}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{441}{4}}$$

$$= \frac{21}{2}$$

$$= 10.5$$

$\therefore$ கோளத்தின் ஆரை 10.5 cm ஆகும்.

பயிற்சி 4.3

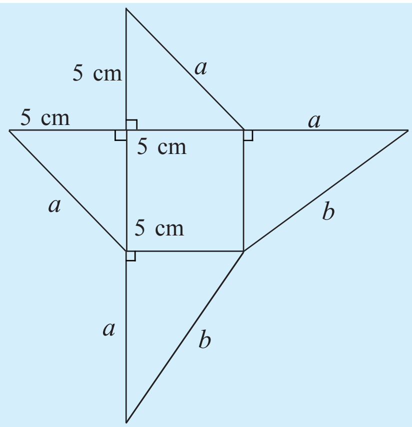
1. 3.5 cm ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.
2. 14 cm ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.
3. மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 5544 cm^2 ஆகவுள்ள ஒரு கோளத்தின் ஆரையைக் காண்க.
4. 7 cm ஆரையுள்ள ஒரு பொள் அரைக்கோளத்தின் புற வளைபரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.
5. 0.5 cm விட்டமுள்ள ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.
6. மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 1386 cm^2 ஆகவுள்ள ஒரு திண்ம அரைக் கோளத்தின் ஆரையைக் காண்க.

பொழிப்பு

- சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a ஆகவும் முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் l ஆகவும் உள்ள சதுரச் செங்கூம்பத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $A = a^2 + 2al$ இனால் தரப்படும்.
- வட்ட அடியின் ஆரை r ஆகவும் சாய்யுரம் l ஆகவும் உள்ள ஒரு திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $A = \pi rl + \pi r^2$ இனால் தரப்படும்.
- ஆரை r ஆகவுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $A = 4\pi r^2$ இனால் தரப்படும்.

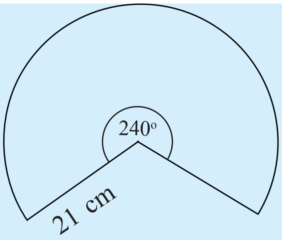
பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு கூம்பகத்தைத் தயாரிப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள மாதிரியுரு கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



   (i) இங்கு a, b என்பவற்றின் மூலம் தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களைக் கணிக்க.
   (ii) இம்மாதிரியுருவைப் பயன்படுத்திச் செய்யப்படும் கூம்பகம் ஒரு செங்கூம்பகமாக இல்லாதிருப்பதற்கான காரணம் யாது ?
   (iii) கூம்பகத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

2. உலோகத்தகட்டிலிருந்து வெட்டியெடுக்கப்பட்ட ஆரைச்சிறையைப் பயன்படுத்தி செவ்வட்டக் கூம்பு ஒன்று தயாரிக்கப்பட்டது.



(i) உலோகத்தகட்டிலிருந்து வெட்டி எடுக்கப்பட்ட அடிவட்டம் பொருத்தப்பட்டது. அதன் ஆரையைக் காண்க.

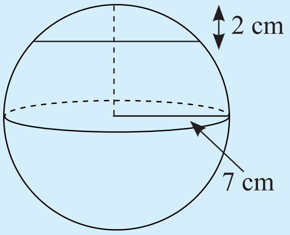
(ii) அதன் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

3. ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் சாயுயரம், செங்குத்துயரம் என்பவற்றுகிடையிலான விகிதம் 5 : 4 ஆகும். அதன் அடியின் ஆரை 6 cm ஆயின்,

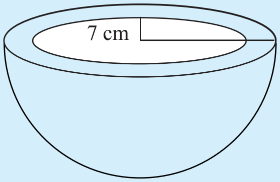
(i) செவ்வட்டக் கூம்பின் சாயுயரத்தைக் காண்க.

(ii) செவ்வட்டக் கூம்பின் வளைமேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

4. 7 cm ஆரையை உடைய ஒரு கோளத்தின் மேல் மூலையிலிருந்து 2 cm வரை கீழ்நோக்கி நிறப் பூச்சு பூசப்பட்டுள்ளதாயின், நிறப் பூச்சு பூசப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக் கணிக்க. (உதவி சுற்றுருளை பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்துக.)



5. அரைக்கோள வடிவான ஒரு களிமண் பாத்திரத்தின் உள் ஆரை 7 cm உம் வெளி ஆரை 7.7 cm உம் ஆயின் பாத்திரத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.



5 திண்மங்களின் கனவளவு

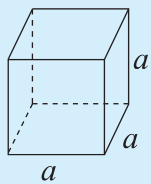
இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- அடி சதுரமாக உள்ள செங்கூம்பகம், செவ்வட்டக் கூம்பு, திண்மக் கோளம் என்பவற்றின் கனவளவைக் காண்பதற்குத்

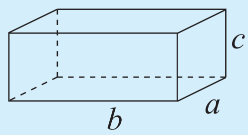
தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

மீட்டற் பயிற்சி

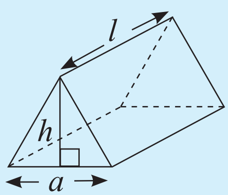
1. முன்னர் நீங்கள் கற்ற சில திண்மங்களின் வரிப்படங்கள் கீழே காணப்படுகின்றன. அவற்றின் கனவளவைக் கணித்த விதத்தை நினைவுகூர்ந்து தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.



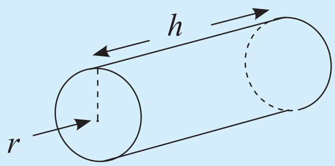
சதுரமுகி



கனவுரு



முக்கோண அரியம்



உருளை

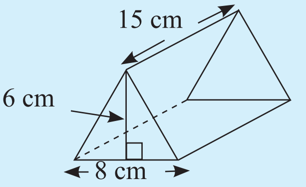
பொருள்	குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு	கனவளவு
சதுரமுகி		
கனவுரு		
முக்கோண அரியம்		
உருளை		

2. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுரமுகியின் கனவளவைக் கணிக்க.

3. 15 cm நீளமும் 10 cm அகலமும் 8 cm உயரமும் உள்ள ஒரு கனவுருவின் கனவளவைக் கணிக்க.

4. 7 cm ஆரையும் 20 cm உயரமும் உள்ள ஓர் உருளையின் கனவளவைக் கணிக்க.

5. உருவில் உள்ள அரியத்தின் கனவளவைக் கணிக்க.

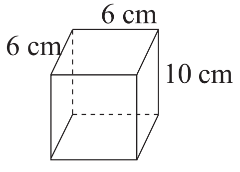


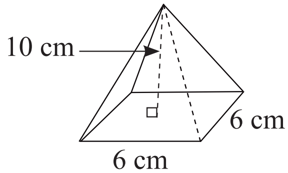
5.1 அடி சதுரமாக உள்ள செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு

சதுர அடி உள்ள ஒரு கூம்பகத்தின் கனவளவைக் காண்பதற்கான ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்குவதில் இப்போது கவனத்தைச் செலுத்துவோம். இதற்காகப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு

உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 6 cm ஆக இருக்கும் சதுர அடியைக் கொண்ட 10 cm உயரமுள்ள பொட் கனவுருவையும் ஒரு பக்க நீளம் 6 cm ஆகவுள்ள சதுர அடியைக் கொண்ட 10 cm உயரமுள்ள ஒரு பொட் கூம்பகத்தையும் மெல்லிய அட்டைத்தாளைப் பயன்படுத்தித் தயாரிக்க.





தயாரித்த கூம்பக வடிவப் பாத்திரத்தில் நுண் மணலை முற்றாக நிரப்புக. அவ்வாறு நிரப்பிய நுண் மணலை முற்றாகக் கனவுரு வடிவமுள்ள பாத்திரத்தில் இடுக. கனவுரு வடிவமுள்ள பாத்திரத்தை நிரப்புவதற்கு இவ்வாறு கூம்பு வடிவப் பாத்திரத்தினால் எத்தனை தடவை மணலை இடவேண்டும் என்பதை அவதானிக்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டில் கனவுரு வடிவமுள்ள பாத்திரத்தை முற்றாக நிரப்புவதற்குக் கூம்பக வடிவமுள்ள பாத்திரத்தினால் முற்றாக மூன்று தடவைகள் மணலை நிரப்ப வேண்டுமென நீங்கள் அவதானிப்பீர்கள்.

இதற்கேற்ப

செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு $\times 3$ = கனவுருவின் கனவளவு

$\therefore$ செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு $= \frac{1}{3} \times$ கனவுருவின் கனவளவு

$= \frac{1}{3} \times$ அடியின் பரப்பளவு $\times$ செங்குத்து உயரம்

சதுர அடியின் ஒரு பக்க நீளம் a cm ஆகவும் செங்குத்து உயரம் h cm ஐயும் கொண்ட செங்கூம்பகத்தின் செங்குத்துயரத்தைக் கண்போம்.

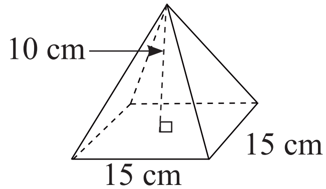
$$= \frac{1}{3} \times (a \times a) \times h$$

$$= \frac{1}{3} a^2h$$

செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு $= \frac{1}{3} a^2h$

உதாரணம் 1

சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 15 cm ஆகவும் உயரம் 10 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு செங்கூம்பகத்தின் கனவளவைக் கன சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



கூம்பகத்தின் கனவளவு $= \frac{1}{3} a^2h$

$= \frac{1}{3} \times 15 \times 15 \times 10$

$= 750$

$\therefore$ கோளத்தின் கனவளவு 750 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 2

சதுர அடியைக் கொண்ட ஒரு செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு 400 cm^3 ஆகும். அதன் உயரம் 12 cm எனின், அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்க.
அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a cm எனக் கொள்வோம்.

கூம்பகத்தின் கனவளவு $= \frac{1}{3} a^2h$

$\therefore \frac{1}{3} a^2h = 400$

$\frac{1}{3} a^2 \times 12 = 400$

$\therefore 4a^2 = 400$

$\therefore a^2 = 100$

$= 10^2$

$\therefore a = 10$

$\therefore$ அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm ஆகும்.

பயிற்சி 5.1

1. சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 5 cm ஆகவுள்ள ஒரு செங்கூம்பகத்தின் உயரம் 9 cm எனின், அதன் கனவளவைக் காண்க.
2. சதுர அடியின் பரப்பளவு 36 cm^2 ஆகவுள்ள ஒரு செங்கூம்பகத்தின் உயரம் 10 cm எனின், அதன் கனவளவைக் காண்க.
3. ஒரு செங்கூம்பகத்தின் உயரம் 12 cm ஆகவும் அதன் கனவளவு 256 cm^3 ஆகவும் இருப்பின், சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

4. ஒரு செங்கூம்பகத்தின் செங்குத்து உயரம் 5 cm ஆகவும் அதன் கனவளவு 60 cm^3 ஆகவும் இருப்பின், அக்கூம்பகத்தின் அடியின் பரப்பளவைக் காண்க.

5. அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 9 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுரச் செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு 216 cm^3 எனின், அதன் செங்குத்து உயரத்தைக் காண்க.

6. அடியின் பரப்பளவு 16 cm^2 ஆகவுள்ள ஒரு சதுரச் செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு 216 cm^3 எனின், அதன் செங்குத்து உயரத்தைக் காண்க.

7. சதுர அடியைக் கொண்ட ஒரு கூம்பகத்தின் அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 12 cm விளிம்பின் நீளம் 10 cm உம் ஆகும். கூம்பகத்தின்
(i) செங்குத்து உயரம்
(ii) கனவளவு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

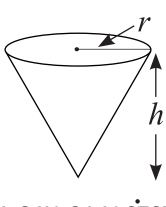
8. சதுர அடியைக் கொண்ட ஒரு கூம்பகத்தின் அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm உம் சாயுயரம் 13 cm உம் ஆகும். கூம்பகத்தின்
(i) செங்குத்து உயரம்
(ii) கனவளவு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

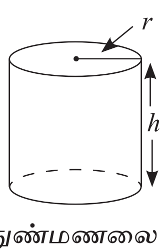
5.2 செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவு

ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் காண்பதற்கான ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்குவதில் இப்போது எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம். இதற்காக செவ் வட்டக் கூம்பு ஒன்றையும் செவ்வட்ட உருளை ஒன்றையும் பயன்படுத்திப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு

உருவில் காணப்படுகின்றவாறு சம ஆரையும் சம உயரமும் உள்ள அடி இல்லாத ஒரு கூம்பையும் அடி உள்ள ஆனால் மூடி இல்லாத ஓர் உருளையையும் அட்டைத் தாளைப் பயன்படுத்தித் தயாரித்துக் கொள்க.





தயாரித்த கூம்பு வடிவமுள்ள பாத்திரத்தில் நுண்மணலை முற்றாக நிரப்புக. அவ்வாறு நிரப்பிய நுண்மணலை முற்றாக உருளைப் பாத்திரத்தில் இடுக. உருளைப் பாத்திரத்தை நிரப்புவதற்கு இவ்வாறு கூம்பு வடிவமுள்ள பாத்திரத்தின் மூலம் எத்தனை தடவை மணலை இடவேண்டும் என்பதை அவதானிக்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டில் உருளையை முற்றாக நிரப்புவதற்கு கூம்பு வடிவப் பாத்திரத்தினால் முற்றாக மூன்று தடவைகள் மணலை நிரப்ப வேண்டும் என அவதானித்திருப்பீர்கள்.

இதற்கேற்ப கூம்பின் கனவளவு $\times 3 =$ உருளையின் கனவளவு

கூம்பின் கனவளவு $= \frac{1}{3} \times$ உருளையின் கனவளவு

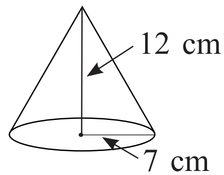
ஆரை r ஐயும் உயரம் h ஐயும் உடைய ஓர் உருளையின் கனவளவை $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ இன் மூலம் பெறலாமென நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள்.

செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவு $(V) = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

இப்பாடத்தில் π இன் பெறுமானம் $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க.

உதாரணம் 1

7 cm ஆரையும் 12 cm உயரமும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் கன சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



கூம்பின் கனவளவு $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

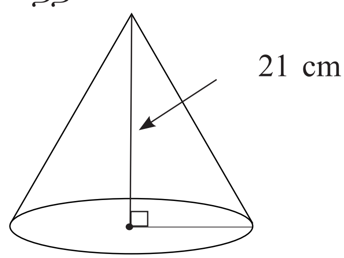
$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 12$

$= 616$

$\therefore$ கூம்பின் கனவளவு 616 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 2

அடியின் பரிதி 44 cm ஆகவுள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் செங்குத்து உயரம் 21 cm எனின், செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் கன சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



அடியின் பரிதி $= 44$ cm

$2\pi r = 44$

கூம்பின் அடியின் ஆரையை r cm எனக் கொள்வோம்.

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$

$r = \frac{44 \times 7}{2 \times 22}$

$r = 7$

$\therefore$ கூம்பின் ஆரை 7 cm ஆகும்.

கூம்பின் கனவளவு $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 21$$
$$=1078$$

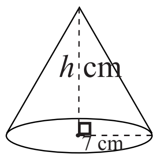
∴ கூம்பின் கனவளவு $1078\ \text{cm}^3$ ஆகும்.

உதாரணம் 3

7 cm ஆரையும் 25 cm சாயுயரமும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின்
(i) உயரம்
(ii) கனவளவு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

கூம்பின் உயரத்தை h cm இனால் காட்டுவோம். பின்வரும் உருவில் காணப்படும் முக்கோணிக்குப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகித்து h ஐக் காண்போம்.

(i) $h^2 + 7^2 = 25^2$
$$h^2 + 49 = 625$$
$$h^2 = 625 - 49$$
$$h = \sqrt{576}$$
$$h = 24$$



∴ செங்குத்து உயரம் 24 cm ஆகும்.

(ii) கூம்பின் கனவளவு $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$$
$$= 1232$$

∴ கூம்பின் கனவளவு $1232\ \text{cm}^3$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

3.5 cm ஆரையும் $154\ \text{cm}^3$ கனவளவும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் செங்குத்து உயரத்தைக் காண்க.
கூம்பின் செங்குத்து உயரத்தை h cm இனால் காட்டுவோம்.

கூம்பின் கனவளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$\therefore 154 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times h$$ ($3.5 = \frac{7}{2}$ ஆகையால்)

$$h = \frac{154 \times 3 \times 7 \times 2 \times 2}{22 \times 7 \times 7}$$
$$= 12$$

∴ கூம்பின் செங்குத்து உயரம் 12 cm ஆகும்.

பயிற்சி 5.2

1. 7 cm ஆரையும் 12 cm செங்குத்து உயரமும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் கணிக்க.

2. 21 cm விட்டமும் 25 cm செங்குத்து உயரமும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் கணிக்க.

3. 13 cm சாயுயரமும் 5 cm அடியின் ஆரையும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் காண்க.

4. 12 cm விட்டமும் 10 cm சாயுயரமும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவைக் காண்க.

5. 616 cm^3 கனவளவு உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் உயரம் 12 cm எனின், செவ்வட்டக் கூம்பின் ஆரையைக் கணிக்க.

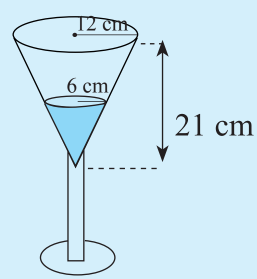
6. 6468 cm^3 கனவளவுள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் செங்குத்து உயரம் 14 cm எனின், செவ்வட்டக் கூம்பின் விட்டத்தைக் கணிக்க.

7. அடியின் பரிதி 44 cm ஆகவுள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் சாயுயரம் 25 cm ஆகும். கூம்பின்
   (i) அடியின் ஆரை
   (ii) உயரம்
   (iii) கனவளவு
   ஆகியவற்றைக் காண்க.

8. ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பு வடிவத் தாங்கியின் அடியின் பரிதி 88 cm ஆகவும் செங்குத்து உயரம் 12 cm ஆகவும் இருப்பின், தாங்கியின் கனவளவைக் காண்க.

9. ஆரை 14 cm ஐயும் உயரம் 30 cm ஐயும் உடைய திண்ம உலோக உருளை ஒன்றை உருக்கி 7 cm ஆரையும் 15 cm உயரமும் உள்ள எத்தனை திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்புகளைச் செய்யலாம்?

10. ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் வடிவத்தில் உள்ள பாத்திரத்தின் ஆரை 12 cm உம் உயரம் 21 cm உம் ஆகும். அதன் உயரத்தில் அரைப்பங்கிற்கு நீர் இருப்பின், பாத்திரத்தை முற்றாக நிரப்புவதற்கு மேலும் எவ்வளவு கனவளவு நீரை இடவேண்டுமெனக் காண்க.

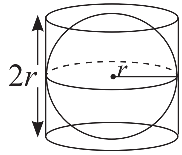


5.3 கோளத்தின் கனவளவு

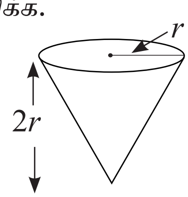
ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குப் பயன்படுத்திய சுற்றுருளை என்னும் உபகரணத்தைக் கொண்டு ஒரு கோளத்தின் கனவளவைக் காண்பதற்கான ஒரு முறையை ஆக்கிமிடீஸ் விளக்கினார். அதற்கேற்பத் திட்டமிடப்பட்டுள்ள பின்வரும் செயற்பாட்டைக் கொண்டு ஒரு கோளத்தின் கனவளவைக் காண்பதற்கான ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்குவோம்.

செயற்பாடு

இதற்காக ஒரு சிறிய கோளத்தை எடுத்துக் கொள்க. கோளத்தின் ஆரைக்குச் சமமான ஆரையையும் கோளத்தின் விட்டத்திற்குச் சமமான உயரத்தையும் கொண்ட இரு பக்கங்களிலும் திறந்துள்ள ஓர் உருளையை ஒரு மெல்லிய அட்டைத்தாளைப் பயன்படுத்திச் செய்க. அதன் பின்னர் கோளத்தை உருளையினுள்ளே மெதுவாகப் புகுத்துக.



அப்போது கோளம் உருளையினுள்ளே முழு வெளியையும் எடுக்காது என்பதும் வெறும் வெளி எஞ்சியிருக்கும் என்பதும் தெளிவாகும். அவ்வெறும் வெளியின் கனவளவைக் காண்பதற்குச் சுற்றுருளையின் மேற்பகுதியை நுண் மணலினால் நிரப்புக. அம்மணலை வெளியே செல்லாதவாறு ஓர் அட்டைத்தாளை இறுக்கி வைத்துக் கொண்டு கீழ்ப் பகுதியை மேலே திருப்புக. இப்போது அப்பகுதியையும் முற்றாக மூடுமாறு நுண் மணலினால் நிரப்புக. பின்னர் சுற்றுருளையின் ஆரைக்குச் சமமானதும் $2r$ உயரம் உள்ளதுமான ஒரு பொட் கூம்பை ஒரு மெல்லிய அட்டைத் தாளைப் பயன்படுத்தித் தயாரிக்க.



இப்போது சுற்றுருளையில் நிரப்பப்பட்டுள்ள நுண் மணலை வீணாகாதவாறு முற்றாக அகற்றி மேலே தயாரித்த பொட் கூம்பினுள்ளே இடுக. அப்போது அம்மணல் பொட் கூம்பினுள்ளே முற்றாக நிரம்பியிருப்பதை நீங்கள் காணலாம்.

இச்செயற்பாட்டிற்கேற்பச்

சுற்றுருளையின் கனவளவு = கோளத்தின் கனவளவு + கூம்பின் கனவளவு

என்பது உங்களுக்குத் தெளிவாகும். அதற்கேற்பச் சுற்றுருளையின் கனவளவிலிருந்து கூம்பின் கனவளவைக் கழிக்கும்போது கோளத்தின் கனவளவு கிடைக்கும் என்பது தெளிவாகும்.

அதாவது

கோளத்தின் கனவளவு = சுற்றுருளையின் கனவளவு − கூம்பின் கனவளவு

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

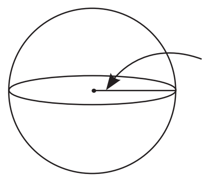
$$= \frac{2}{3} \pi r^2 \times 2r \quad (h = 2r \text{ என்பதால்})$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3$$

கோளத்தின் கனவளவு = $\frac{4}{3} \pi r^3$

உதாரணம் 1

21 cm ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் கனவளவைக் கன சென்ரிமீற்றரில் காண்க.



கோளத்தின் கனவளவு $= \frac{4}{3} \pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$$

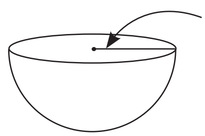
$$= 38\ 808$$

∴ கோளத்தின் கனவளவு 38 808 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 2

7 cm ஆரையுள்ள ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனவளவை கன சென்ரிமீற்றரில் காண்க.

அரைக்கோளத்தின் கனவளவு $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3$



$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$$

$$= 718.67$$

∴ அரைக்கோளத்தின் கனவளவு 718.67 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 3

$113\frac{1}{7}$ cm^3 கனவளவுள்ள ஒரு சிறிய கண்ணாடிப் பந்தின் ஆரையைக் காண்க.

கோளத்தின் கனவளவு $= \frac{4}{3} \pi r^3$

$$\therefore \quad \frac{4}{3} \pi r^3 = 113\frac{1}{7}$$

$$\therefore \quad r^3 = \frac{792}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{22}{7}$$

$$= 27$$

$$= 3^3$$

$$\therefore \quad r = 3$$

∴ கோளத்தின் ஆரை 3 cm ஆகும்.

பயிற்சி 5.3

1. 7 cm ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் கனவளவைக் காண்க.
2. 9 cm விட்டமுள்ள ஒரு கோளத்தின் கனவளவு $381 \frac{6}{7}$ cm^3 எனக் காட்டுக.
3. ஒரு கோள வடிவக் கோளின் ஆரை 2.1 km எனின், கோளின் கனவளவைக் காண்க.
4. 10.5 cm ஆரையுள்ள ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனவளவைக் காண்க.
5. ஒரு கோளத்தின் கனவளவு $11498 \frac{2}{3}$ cm^3 எனின், அதன் ஆரையைக் கணிக்க.
6. 7 cm ஆரையுள்ள 8 உலோகக் கோளங்களை உருக்கி உலோகம் வீணாகாதவாறு ஒரு தனி உலோகக் கோளம் செய்யப்பட்டுள்ளது. அதன் ஆரையைக் கணிக்க.
7. 12 cm ஆரையுள்ள ஒரு திண்ம அரைக்கோள உலோகக் குற்றியை உருக்கி 3 cm வீதம் ஆரையுள்ள 32 சிறிய திண்ம உலோகக் கோளங்களைச் செய்யலாம் எனக் காட்டுக.

பொழிப்பு

- அடி சதுரமாகவும் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a ஆகவும் செங்குத்து உயரம் h ஆகவும் உள்ள ஒரு சதுரச் செங்கூம்பகத்தின் கனவளவு V எனின்,
$V = \frac{1}{3} a^2h$ ஆகும்.
- அடியின் ஆரை r ஆகவும் உயரம் h ஆகவும் உள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவு V எனின், $V = \frac{1}{3} \pi r^2h$ ஆகும்.
- ஆரை r ஆகவுள்ள ஒரு கோளத்தின் கனவளவு V எனின், $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ஆகும்.

பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 12 cm ஆகவுள்ள சதுரக் குறுக்குவெட்டைக் கொண்ட 22 cm நீளமுள்ள ஓர் உலோகக் குற்றியை உருக்கி 3 cm ஆரையுள்ள கோளங்கள் செய்யப்படுமெனின், செய்யத்தக்க கோளங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை யாது?
2. 3.5 cm ஆரையுள்ள ஓர் உலோகக் கோளத்தை உருக்கி அதிலிருந்து அதே ஆரையுள்ள ஒரு கூம்பு செய்யப்பட்டது. உலோகம் வீணாவதில்லையெனக் கருதிக் கூம்பின் உயரத்தைக் கணிக்க.

6 ஈருறுப்புக் கோவைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் கனத்தை விரிப்பதற்குத்

தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

$x + y$ வடிவத்தில் உள்ள ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கம் $(x + y)^2$ இனால் காட்டப்படும் எனவும் இதன் கருத்து $(x + y)\,(x + y)$ என்னும் பெருக்கம் எனவும் அப்பெருக்கத்தை விரிக்கும்போது $x^2 + 2xy + y^2$ எனக் கிடைக்கும் எனவும் முன்னர் கற்றீர்கள். மேலும் $(x - y)^2$ ஐ விரிக்கும்போது $x^2 - 2xy + y^2$ எனக் கிடைக்கும் என்பதும் உங்கள் நினைவில் இருக்கும். ஈருறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கத்தின் விரி தொடர்பாக இதுவரைக்கும் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் கோவைகளில் உள்ள வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

a. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + ...$
b. $(a - b)^2 = ... - 2ab + b^2$
c. $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + ...$
d. $(y + 3)^2 = y^2 + ... + 9$
e. $(a - 5)^2 = ... - 10a + 25$
f. $(b - 1)^2 = b^2 \; ..... + ...$
g. $(4 + x)^2 = 16 + ... \; .....$
h. $(7 - t)^2 = 49 \; ..... + t^2$
i. $(2x + 1)^2 = 4x^2 \; ..... + 1$
j. $(3b - 2)^2 = ... - 12b \; ......$

2. பின்வரும் வர்க்கங்கள் ஒவ்வொன்றையும் விரிக்க.

a. $(2m + 3)^2$ **b.** $(3x - 1)^2$ **c.** $(5+2x)^2$
d. $(2a + 3b)^2$ **e.** $(3m - 2n)^2$ **f.** $(2x + 5y)^2$

3. ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கமாக எழுதுவதன் மூலம் பின்வரும் வர்க்கங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

a. 32^2 **b.** 103^2 **c.** 18^2 **d.** 99^2

6.1 ஈருறுப்புக் கோவைகளின் கனம்

$a + b$ வடிவத்தில் உள்ள ஈருறுப்புக் கோவையின் கனம் $(a + b)^3$ இனால் காட்டப்படும். அதாவது $(a + b)$ இன் முப்படியாகும். அதாவது $(a + b)^2$ ஐ $(a + b)$ இனால் பெருக்குவதாகும். பின்வரும் கோவைகள் மூன்றாம் வலுவாக எழுதப்பட்டுள்ள விதத்தை நன்றாக அவதானிக்க.

$$3^3 = 3 \times 3^2 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$
$$x^3 = x \times x^2 = x \times x \times x$$
$$(2x)^3 = (2x) \times (2x)^2 = (2x) \times (2x) \times (2x) = 8x^3$$

அவ்வாறே,

$$(x+1)^3 = (x+1)(x+1)^2 = (x+1)\,(x+1)\,(x+1)$$
$$(a-2)^3 = (a-2)(a-2)^2 = (a-2)\,(a-2)\,(a-2)$$
$(3+m)^3 = (3+m)(3+m)^2 = (3+m)\,(3+m)\,(3+m)$ எனவும் எழுதலாம்.

ஈருறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கத்தை விரித்த அதே விதமாக ஈருறுப்புக் கோவைகளின் கனங்களையும் விரிக்கலாம். அதனைப் பற்றிப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

$$(x+y)^3 = (x+y)\,(x+y)^2$$
$$= (x+y)\,(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

இதற்கேற்ப வடிவம் $(x+y)$ இல் உள்ள ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் கனத்தின் விரிவை ஒரு சூத்திரமாக நினைவில் வைத்துக் கொள்வதற்குப் பின்வரும் கோலத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

- x^3 – முதல் உறுப்பின் கனம்
- $3x^2y$ – முதல் உறுப்பின் வர்க்கத்தினதும் இரண்டாம் உறுப்பினதும் பெருக்கத்தின் மூன்று மடங்கு
- $3xy^2$ – முதல் உறுப்பினதும் இரண்டாம் உறுப்பின் வர்க்கத்தினதும் பெருக்கத்தின் மூன்று மடங்கு
- y^3 – இரண்டாம் உறுப்பின் கனம்

இதற்கேற்ப

$(m+n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$ என எழுதலாம்.

அவ்வாறே $(a+2)^3 = a^3 + 3a^2 \times 2 + 3a \times 2^2 + 2^3$ என எழுதி, இதனை மேலும் $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$ எனச் சுருக்கலாம்.

இப்போது மேற்குறித்த கோலத்திற்கேற்ப $(x-y)^3$ இன் விரிவைப் பெறும் விதத்தைக் கருதுவோம்.

$$(x-y)^3 = (x-y)(x-y)^2$$
$$= (x-y)\quad(x^2 - 2xy + y^2)$$
$$= x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3$$
$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$(x-y)^3$ இன் விரியை வேறு விதமாகவும் பெறுவோம்.
இங்கு $x - y$ ஐ $x + (-y)$ எனவும் எழுதலாம். அப்போது நீங்கள் அதனை முன்னர் கண்ட வடிவத்திலான ஒரு கோவையாகக் கருதலாம். அதற்கேற்ப $(x - y)^3$ ஐ $\{x + (-y)\}^3$ என எழுதிக் காட்டலாம். இப்போது இக்கனத்தின் விரிவைக் கருதுவோம்.

$$\{x + (-y)\}^3 = x^3 + 3 \times x^2 \times (-y) + 3 \times x \times (-y)^2 + (-y)^3$$
$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

மேற்குறித்த உறுப்புகளைச் சுருக்குகையில் $(-y)^2 = y^2$, $(-y)^3 = -y^3$ என்னும் இயல்புகள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளமையை அவதானிக்க.
இதற்கேற்ப $(m-n)^3 = m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$
$(p-q)^3 = p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$ என எழுதலாம்

மேற்குறித்த இரு விதங்களிலும் $(x - y)^3$ இன் விரியைப் பெறத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை முதல் முறையைப் பின்பற்றுதல் எளிது என்பதை நீங்கள் விளங்கிக் கொள்வீர்கள்.

இப்போது எண்கள் இடம்பெறும் சில ஈருறுப்புக் கோவைகளின் கனங்கள் விரிக்கப்படும் விதத்தைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 2

$$(x+5)^3 = x^3 + 3 \times x^2 \times 5 + 3 \times x \times 5^2 + 5^3$$
$$= x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

உதாரணம் 3

$$(1+x)^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times x + 3 \times 1 \times x^2 + x^3$$
$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

உதாரணம் 4

$$(y-4)^3 = y^3 + 3 \times y^2 \times (-4) + 3 \times y \times (-4)^2 + (-4)^3$$
$$= y^3 - 12y^2 + 48y - 64$$

அல்லது

$$(y-4)^3 = y^3 - 3 \times y^2 \times 4 + 3 \times y \times 4^2 - 4^3$$
$$= y^3 - 12y^2 + 48y - 64$$

உதாரணம் 5

$$(5-a)^3 = 5^3 + 3 \times 5^2 \times (-a) + 3 \times 5 \times (-a)^2 + (-a)^3$$
$$= 125 - 75a + 15a^2 - a^3$$

உதாரணம் 6

$$(-2+a)^3 = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 \times a + 3 \times (-2) \times a^2 + a^3$$
$$= -8 + 12a - 6a^2 + a^3$$

உதாரணம் 7

$$(-3-b)^3 = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 \times (-b) + 3(-3) \times (-b)^2 + (-b)^3$$
$$= -27 - 27b - 9b^2 - b^3$$

அல்லது

$$(-3-b)^3 = (-1)^3(3+b)^3 = -1\,(27 + 27b + 9b^2 + b^2)$$
$$= -27 - 27b - 9b^2 - b^3$$

உதாரணம் 8

$(x-3)^3$ என்னும் கோவையை விரித்து எழுதி $4^3 - 3^2 \times 4^2 + 3^3 \times 4 - 3^3 = 1$ ஐ வாய்ப்புப் பார்க்க.

$(x-3)^3 = x^3 - 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 - 3^3$

$x = 4$ என்பதை பிரதியிடும்போது

வ.ப $= (4-3)^3$
$= 1$

இ.ப $= x^3 - 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 - 3^3$
$= 4^3 - 3^2 \times 4^2 + 3^3 \times 4 - 3^3$
$= 1$

$(4-3)^3 = 4^3 - 3 \times 4^2 \times 3 + 3 \times 4 \times 3^2 - 3^3$ ஆகும்.

பயிற்சி 6.1

1. உகந்த அட்சரகணித உறுப்புகளை அல்லது எண்களை அல்லது அட்சரகணிதக் குறிகளைப் (+ அல்லது –) பயன்படுத்தி வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

a. $(x+3)^3 = x^3 + 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 + 3^3 = x^3 + \square + \square + 27$

b. $(y+2)^3 = y^3 + 3 \times \square \times \square + 3 \times \square \times \square + 2^3 = y^3 + 6y^2 + \square + \square$

c. $(a-5)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times (-5) + 3 \times a \times (-5)^2 + (-5)^3 = a^3 - \square + \square - 125$

d. $(3+t)^3 = \square + 3 \times \square \times \square + 3 \times \square \times \square + \square = \square + 27t + \square + t^3$

e. $(x-2)^3 = x^3 \square 3 \times \square \times \square + 3 \times \square \times \square + (-2)^3 = x^3 \square \square + 12x - \square$

2. விரித்தெழுதுக.

a. $(m+2)^3$ **b.** $(x+4)^3$ **c.** $(b-2)^3$ **d.** $(t-10)^3$

e. $(5+p)^3$ **f.** $(6+k)^3$ **g.** $(1+b)^3$ **h.** $(4-x)^3$

i. $(2-p)^3$ **j.** $(9-t)^3$ **k.** $(-m+3)^3$ **l.** $(-5-y)^3$

m. $(ab+c)^3$ **n.** $(2x+3y)^3$ **o.** $(3x+4y)^3$ **p.** $(2a-5b)^3$

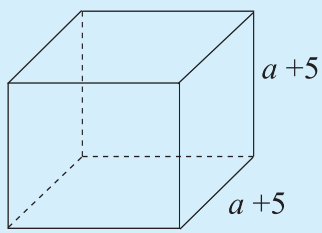
3. பின்வரும் அட்சரகணிதக் கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் ஈருறுப்புக் கோவையின் கனமாக எழுதுக.

a. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ **b.** $c^3-3c^2d+3cd^2-d^3$

c. $x^3+6x^2+12x+8$ **d.** $y^3-18y^2+108y-216$

e. $1+3x+3x^2+x^3$ **f.** $64-48x+12x^2-x^3$

4. கீழே காணப்படும் சதுரமுகியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $(a+5)$ அலகுகள் ஆகும். அதன் கனவளவுக்கான ஒரு கோவையை எழுதி அக்கோவையை விரித்தெழுதுக.



5. $(x+5)^3$ ஐ விரித்து

(i) $x=2$

(ii) $x=4$

ஆகும்போது சந்தர்ப்பங்களில் விடையை வாய்ப்புப் பார்க்க.

6. கனம் பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்தித் தரப்பட்டுள்ள எண் கோவைகளின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $64-3\times16\times3+3\times4\times9-27$

(ii) $216-3\times36\times5+3\times6\times25-125$

7. பின்வரும் ஒவ்வொன்றினதும் பெறுமானத்தை ஈருறுப்புக் கோவையின் கனமாக எழுதிக் காண்க.

(i) 21^3 (ii) 102^3 (iii) 17^3 (iv) 98^3

8. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a-5$ ஆகவுள்ள ஒரு சதுரமுகியின் கனவளவை a இன் சார்பிற் காண்க.

9. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ ஐ ஒரு கனமாக எழுதி, அதிலிருந்து $25^3-3\times25^2\times23+3\times25\times23^2-23^3$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

7 அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- அட்சரகணிதப் பின்னங்களின் பெருக்கலையும் வகுத்தலையும் செய்வதற்குத் தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

அட்சரகணிதப் பின்னங்களைக் கூட்டலும் கழித்தலும் பற்றி நீங்கள் முன்னர் கற்ற விடயங்களை மீட்பதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்குக.

a. $\frac{a}{5} + \frac{2a}{5}$ **b.** $\frac{8}{x} - \frac{3}{x}$ **c.** $\frac{7}{3m} + \frac{3}{4m} - \frac{8}{m}$

d. $\frac{9}{x+2} + \frac{1}{x}$ **e.** $\frac{1}{m+2} - \frac{2}{m+3}$ **f.** $\frac{a+3}{a^2-4} + \frac{1}{a+2}$

g. $\frac{2}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-1}$ **h.** $\frac{1}{x^2-9x+20} - \frac{1}{x^2-11x+30}$

7.1 அட்சரகணிதப் பின்னங்களைப் பெருக்கல்

ஒரு பின்ன எண்ணை வேறொரு பின்ன எண்ணினால் பெருக்கும் அதே விதத்திலேயே ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தை வேறோர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தினால் பெருக்கலைச் செய்யலாம். இதனை உதாரணங்களின் மூலம் விளங்கிக்கொள்ளலாம்.

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3}$$

என்னும் பெருக்கலைக் கவனிப்போம். இரு பின்னங்களைப் பெருக்கல் என்பது அப்பெருக்கத்தை ஒரு தனி அட்சரகணிதப் பின்னமாகக் காட்டல் என்பதை நினைவில் வைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

இரு பின்னங்களின் பகுதியில் உள்ள உறுப்புகளையும் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளையும் வேறு வேறாகப் பெருக்கி ஒரு தனிப் பின்னம் பெறப்படும்.

அதாவது $\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = \frac{x \times x}{2 \times 3}$

$= \frac{x^2}{6}$ எனப் பெருக்கப்படும்.

பகுதியிலும் தொகுதியிலும் உள்ள உறுப்புகளை மேலும் சுருக்க முடியுமெனின் அவற்றைச் சுருக்கி மிக எளிய விதத்தில் காட்டலாம். இவ்வாறு சுருக்கலைப் பின்னங்களைப் பெருக்குவதற்கு முன்னர் அல்லது பெருக்கிய பின்னர் செய்யலாம். இத்தகைய சுருக்கல் உள்ள ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்க்கும் விதம் பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

$\frac{8}{a} \times \frac{3}{2b}$ பெருக்கப்படும் விதம் பற்றி இப்போது பார்ப்போம்.

இங்கு தொடக்கத்தில் உள்ள பின்னத்தின் தொகுதியில் உள்ள 8 இற்கும் இரண்டாம் பின்னத்தின் பகுதியில் உள்ள $2b$ இற்கும் பொதுக் காரணியாகிய 2 ஆல் வகுக்கலாம். அதனை இவ்வாறு சுருக்குவோம்.

$$\frac{8}{a} \times \frac{3}{2b} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{a} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}b}$$

இப்போது இரு பின்னங்களிலும் தொகுதியிலும் பகுதியிலும் உள்ள பெறுமானங்களை வேறுவேறாகப் பெருக்குவோம்.
அப்போது

$$\frac{8}{a} \times \frac{3}{2b} = \frac{4 \times 3}{a \times b}$$

$$= \frac{12}{ab}$$

பின்னங்களைப் பெருக்கிய பின்னரும் பொதுக் காரணிகளால் வகுக்கலாம். பின்வரும் உதாரணத்தைப் பார்க்க.

$$\frac{3}{2a} \times \frac{2b}{3} = \frac{6b}{6a}$$

$$= \frac{b}{a}$$

எனப் பெருக்கலாம். எனினும் பெருக்குவதற்கு முன்னர் பொதுக் காரணிகளால் வகுப்பதன் மூலம் நீண்ட செய்கைகளைத் தவிர்க்கலாம். ஆகையால் அவ்வாறு செய்தல் மிகவும் உகந்தது.

பின்வரும் அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்கியுள்ள விதத்தைப் பார்க்க.

உதாரணம் 1

$$\frac{x}{y} \times \frac{4}{5x}$$

$$= \frac{\cancel{x}}{y} \times \frac{4}{5\cancel{x}} \quad \text{(பொதுக் காரணி } x \text{ ஆல் வகுத்தல்)}$$

$$= \frac{1 \times 4}{y \times 5}$$

$$= \frac{4}{5y}$$

தொகுதியில் அல்லது பகுதியில் அல்லது அவை இரண்டிலும் அட்சரகணிதக் கோவைகள் இடம்பெறும் அட்சரகணிதப் பின்னங்களைப் பெருக்கும்போது முதலில் காரணிகளை வேறுபடுத்த வேண்டும். அங்கு பொதுக் காரணிகள் இருப்பின் அவற்றை நீக்க வேண்டும். இப்போது அத்தகைய ஓர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\frac{2}{x+3} \times \frac{x^2+3x}{5}$

$$\frac{2}{x+3} \times \frac{x^2+3x}{5} = \frac{2}{x+3} \times \frac{x(x+3)}{5}$$ (x^2+3x காரணிகளாக வேறுபடுத்தல்)

$$= \frac{2}{x+3} \times \frac{x(x+3)}{5}$$ [$(x+3)$ என்னும் பொதுக் காரணியால் வகுத்தல்]

$$= \frac{2x}{5}$$

இப்போது சிறிதளவு சிக்கலான ஒரு பிரசினத்தைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 3

சுருக்குக.

$\frac{a^2-9}{5a} \times \frac{2a^2-4}{a^2+a-6}$

{$a^2+a-6=(a+3)(a-2)$ ஆகையால்}

$$\frac{a^2-9}{5a} \times \frac{2a^2-4}{a^2+a-6} = \frac{a^2-3^2}{5a} \times \frac{2(a-2)}{(a+3)(a-2)}$$

$$= \frac{(a-3)(a+3)}{5a} \times \frac{2(a-2)}{(a+3)(a-2)}$$

$$= \frac{2(a-3)}{5a}$$

பயிற்சி 7.1

1. பின்வரும் அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்குக.

a. $\frac{6}{x} \times \frac{2}{3x}$ **b.** $\frac{x}{5} \times \frac{3}{xy}$

c. $\frac{2a}{15} \times \frac{5}{9}$ **d.** $\frac{4m}{5n} \times \frac{3}{2m}$

e. $\frac{x+1}{8} \times \frac{2x}{x+1}$ **f.** $\frac{3a-6}{3a} \times \frac{1}{a-2}$

g. $\frac{x^2}{2y+5} \times \frac{4y+10}{3x}$ **h.** $\frac{m^2-4}{m+1} \times \frac{m^2+2m+1}{m+2}$

i. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-1} \times \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ **j.** $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2} \times \frac{2a-2b}{a^2+ab}$

7.1 ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தை வேறோர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தினால் வகுத்தல்

ஒரு பின்னத்தை வேறொரு பின்னத்தினால் வகுக்கும்போது தொடக்கப் பின்னத்தை இரண்டாம் பின்னத்தின் நிகர்மாற்றினால் பெருக்கி விடையைப் பெற்ற விதம் உங்கள் நினைவில் இருக்கும் என்பதில் ஐயமில்லை. அவ்வாறே ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தினால் வகுக்கும்போது நிகர்மாற்றினால் பெருக்கலாம்.
அட்சரகணிதப் பின்னங்களை வகுத்தல் பற்றிக் கற்குமுன்னர் ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தின் நிகர்மாற்றுப் பற்றி ஆராய்வோம்.

அட்சரகணிதப் பின்னத்தின் நிகர்மாற்று

இரு எண்களைப் பெருக்கும்போது பெருக்கம் 1 எனின், அவற்றில் ஓர் எண் மற்றைய எண்ணின் நிகர்மாற்று அல்லது பெருக்கல் நேர்மாறு என முன்னர் கற்றீர்கள். அதற்கேற்ப ஓர் எண்ணின் நிகர்மாற்றுப் பற்றி நாம் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வோம்.

$2 \times \frac{1}{2} = 1$ ஆகையால் 2 இன் நிகர்மாற்று $\frac{1}{2}$ உம் $\frac{1}{2}$ இன் நிகர்மாற்று 2 உம் ஆகும்.

$\frac{1}{3} \times 3 = 1$ ஆகையால் $\frac{1}{3}$ இன் நிகர்மாற்று 3 உம் 3 இன் நிகர்மாற்று $\frac{1}{3}$ உம் ஆகும்.

$\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$ ஆகையால் $\frac{4}{5}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{5}{4}$ உம் $\frac{5}{4}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{4}{5}$ உம் ஆகும்.

ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தின் நிகர்மாற்றும் மேற்குறித்தவாறே விவரிக்கப்படும். அதாவது ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தை வேறோர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தினால் பெருக்கும்போது பெருக்கம் 1 எனின், அவ்வோர் அட்சரகணிதப் பின்னம் மற்றைய அட்சரகணிதப் பின்னத்தின் நிகர்மாற்று ஆகும்.

$\frac{5}{x}, \frac{x}{5}$ என்னும் அட்சரகணிதப் பின்னங்களைப் பெருக்குவோம்.

$$\frac{5}{x} \times \frac{x}{5} = \frac{1}{1} = 1$$

ஆகவே $\frac{5}{x}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{x}{5}$ உம் $\frac{x}{5}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{5}{x}$ உம் ஆகும்.

இவ்வாறே

$\frac{x+1}{y} \times \frac{y}{x+1} = 1$ ஆகையால்,

$\frac{x+1}{y}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{y}{x+1}$ உம் $\frac{y}{x+1}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{x+1}{y}$ உம் ஆகும்.

ஓர் எண்ணின் நிகர்மாற்றைக் காணும்போது அதன் தொகுதியையும் பகுதியையும் பரிமாற்றி எழுதுவதன் மூலம் நிகர்மாற்று பெறப்படும். அதே விதத்தில் ஓர் அட்சர கணிதப் பின்னத்தின் பகுதியையும் தொகுதியையும் பரிமாற்றி எழுதுவதன் மூலம் அவ்வட்சரகணிதப் பின்னத்தின் நிகர்மாற்றைப் பெறலாம் என்பது இதிலிருந்து தெளிவாகின்றது.

கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதப் பின்னங்களையும் அவற்றின் நிகர்மாற்றுகளையும் அவதானிக்க.

அட்சரகணிதப் பின்னம்	நிகர்மாற்று
$\frac{m}{4}$	$\frac{4}{m}$
$\frac{a}{a+2}$	$\frac{a+2}{a}$
$\frac{x-3}{x^2+5x+6}$	$\frac{x^2+5x+6}{x-3}$

இப்போது நாம் ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னம் வேறோர் அட்சரகணிதப் பின்னத்தினால் வகுக்கப்படும் விதம் பற்றிக் கற்போம்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $\frac{3}{x} \div \frac{4y}{x}$

$\frac{3}{x} \div \frac{4y}{x} = \frac{3}{x} \times \frac{x}{4y}$ ($\frac{4y}{x}$ இனால் வகுப்பதற்குப் பதிலாக அதன் நிகர்மாற்றாகிய $\frac{x}{4y}$ இனால் பெருக்கல்)

$= \frac{3}{x} \times \frac{x}{4y}$ (பொதுக் காரணியாகிய x ஆல் வகுத்தல்)

$= \frac{3}{4y}$ (பகுதியையும் தொகுதியையும் வேறுவேறாகப் பெருக்கல்)

வேறு சில உதாரணங்களையும் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\frac{a}{b} \div \frac{ab}{4}$

$\frac{a}{b} \div \frac{ab}{4} = \frac{a}{b} \times \frac{4}{ab}$ (நிகர்மாற்றினால் பெருக்கல்)

$= \frac{a}{b} \times \frac{4}{ab}$ (பொதுக் காரணியாகிய a ஆல் வகுத்தல்)

$= \frac{4}{b^2}$

பகுதியில் அல்லது தொகுதியில் அட்சரகணிதக் கோவைகள் இருக்கும்போது முதலில் அக்கோவைகளைக் காரணிகளாக வேறுபடுத்திப் பின்னர் பொதுக் காரணிகளை நீக்கிச் சுருக்கலாம்.

உதாரணம் 3

சுருக்குக. $\dfrac{3x}{x^2 + 2x} \div \dfrac{5x}{x^2 - 4}$

$$\frac{3x}{x^2 + 2x} \div \frac{5x}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{3x}{x^2 + 2x} \times \frac{x^2 - 4}{5x}$$ (நிகர்மாற்றினால் பெருக்கல்)

$$= \frac{3x}{x(x+2)} \times \frac{(x-2)(x+2)}{5x}$$ (கோவைகளைக் காரணிகளாக வேறுபடுத்தலும் பொதுக் காரணிகளினால் வகுத்தலும்)

$$= \frac{3(x-2)}{5x}$$

உதாரணம் 4

சுருக்குக. $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{x} \div \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x}$

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x} \div \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \frac{x^2 + 3x - 10}{x} \times \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$$

$$= \frac{(x+5)(x-2)}{x} \times \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)}$$

$$= \frac{x-2}{1}$$

$$= x - 2$$

பயிற்சி 7.2

1. பின்வரும் அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்குக.

a. $\dfrac{5}{x} \div \dfrac{10}{x}$ **b.** $\dfrac{m}{3n} \div \dfrac{m}{2n^2}$ **c.** $\dfrac{x+1}{y} \div \dfrac{2(x+1)}{x}$

d. $\dfrac{2a-4}{2a} \div \dfrac{a-2}{3}$ **e.** $\dfrac{x^2 + 4x}{3y} \div \dfrac{x^2 - 16}{12y^2}$ **f.** $\dfrac{p^2 + pq}{p^2 - pr} \div \dfrac{p^2 - q^2}{p^2 - r^2}$

g. $\dfrac{m^2 - 4}{m+1} \div \dfrac{m+2}{m^2 + 2m + 1}$ **h.** $\dfrac{x^2y^2 + 3xy}{4x^2 - 1} \div \dfrac{xy + 3}{2x + 1}$

i. $\dfrac{a^2 - 5a}{a^2 - 4a - 5} \div \dfrac{a^2 - a - 2}{a^2 + 2a + 1}$ **j.** $\dfrac{x^2 - 8x}{x^2 - 4x - 5} \times \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 8x^2} \div \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 5}$

8 சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள தளஉருவங்களின் பரப்பளவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே ஒரே அடியில் இருக்கும் முக்கோணியின் பரப்பளவுக்கும் இணைகரத்தின் பரப்பளவுக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமை பற்றிய தேற்றங்களை இனங்காண்பதற்கும் அவற்றுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

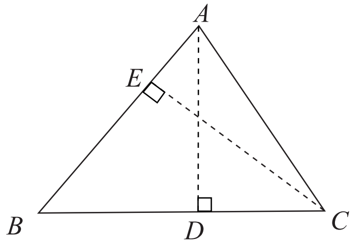
தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

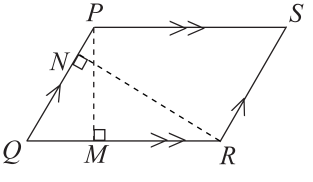
அறிமுகம்

பல்வேறு தள உருவங்களைப் பற்றியும் சில விசேட விதத்தில் உள்ள தள உருவங்களின் பரப்பளவுகளைக் காணும் விதம் பற்றியும் நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். அவற்றில் முக்கோணிகளினதும் இணைகரங்களினதும் பரப்பளவைப் பெற்றுள்ள விதத்தை நினைவுகூர்வோம்.

முக்கோணிகளினதும் இணைகரங்களினதும் பரப்பளவுகளைக் காணும்போது **செங்குத்துயரம்**, **அடி** என்னும் பதங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இப்பதங்களினால் கருதப்படுபவற்றை முதலில் நினைவுகூர்வோம்.

கீழே முக்கோணி ABC உம் இணைகரம் $PQRS$ உம் தரப்பட்டுள்ளன.





முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவைக் காணும்போது விருப்பமான ஒரு பக்கத்தை அடியாகக் கருதலாம். உதாரணமாகப் பக்கம் BC யை அடியாகக் கொள்ளலாம். அப்போது ஒத்த செங்குத்துயரமாகக் கோட்டுத் துண்டம் AD கருதப்படுகின்றது. அதாவது, A யிலிருந்து BC யிற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தாகும்.

இப்போது

முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$ எனக் கற்றுள்ளோம்.

பக்கம் AB யை அடியாகக் கருதினால், ஒத்த குத்துயரம் கோடு CE ஆகும்.

அதற்கேற்ப முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times AB \times CE$ எனவும் கருதலாம். இவ்வாறே AC யை அடியாகக் கருதி B யிலிருந்து ஒத்த செங்குத்துயரத்தை வரையும் போது முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவைக் காணலாம்.

இப்போது இணைகரம் $PQRS$ ஐக் கருதுவோம். இங்கும் எந்தவொரு பக்கத்தையும் அடியாகக் கொண்டு பரப்பளவைக் காணலாம். அதில் பக்கம் QR ஐ அடியாகக் கருதினால், ஒத்த செங்குத்துயரம் கோடு PM ஆகும். அதாவது, QR இற்கும் அதன் எதிர்ப் பக்கம் PS இற்குமிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம்.

அப்போது இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு $= QR \times PM$ என நாம் கற்றுள்ளோம்.

பக்கம் PQ வை அடியாகக் கருதினால் ஒத்த செங்குத்துயரம் RN ஆகும்.

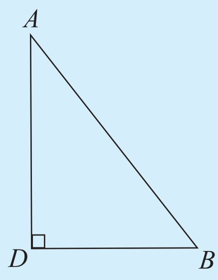
அப்போது இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு $= PQ \times RN$ எனவும் எழுதலாம்.

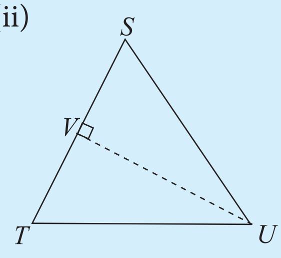
குறிப்பு

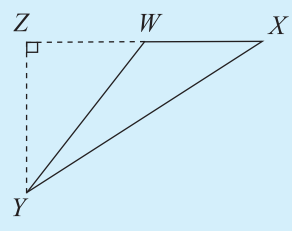
ஒரு முக்கோணியின் அல்லது இணைகரத்தின் செங்குத்துயரத்தின் நீளமும் பெரும்பாலும் செங்குத்துயரம் எனப்படும். இவ்விடயங்களைக் கொண்டு முன்னர் கற்ற முக்கோணிகளினதும் இணைகரங்களினதும் பரப்பளவைக் காணல் பற்றிக் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

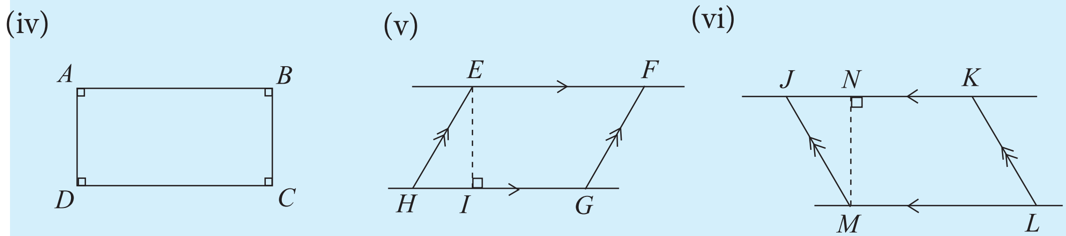
மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

(i)


(ii)


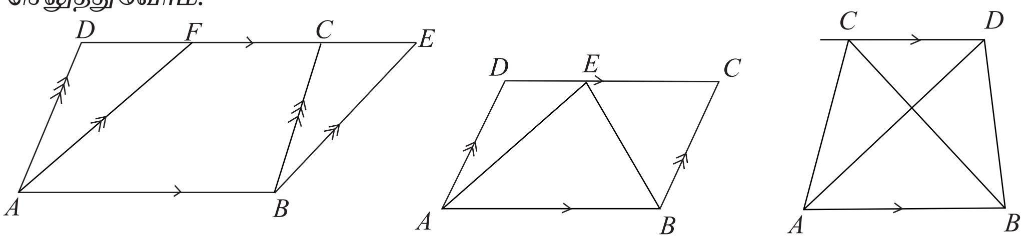
(iii)




உருவம்	அடி	செங்குத்து உயரம்	பரப்பளவு (பக்கங்களின் பெருக்கமாக)
(i) முக்கோணி ABD (ii) முக்கோணி STU (iii) முக்கோணி WXY (iv) செவ்வகம் $ABCD$ (v) இணைகரம் $EFGH$ (vi) இணைகரம் $JKLM$			

8.1 ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே ஒரே அடியைக் கொண்ட இணைகரங்களும் முக்கோணிகளும்

முதலில் ஒரே சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே, ஒரே அடி மீது உள்ள இணைகரங்களும் முக்கோணிகளும் என்பதன் கருத்தை அறிவதற்குப் பின்வரும் வரிப்படங்களில் கவனம் செலுத்துவோம்.



உரு (i) உரு (ii) உரு (iii)

உரு (i) இல் காணப்படும் $ABCD$, $ABEF$ ஆகிய இரு இணைகரங்களும் AB, DE என்னும் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே உள்ளன. இங்கு "இடையே" என்பதன் கருத்து ஒவ்வோர் இணைகரத்தினதும் இரு எதிர்ப் பக்கங்களும் இரு சமாந்தரக் கோடுகளின் மீது உள்ளன என்பதாகும். மேலும் அவ்விரு இணைகரங்களுக்கும் பக்கம் AB பொதுவாகும். இத்தகைய ஓர் அமைவில் அவ்விரு இணைகரங்களும் ஒரே சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையேயும் ஒரே அடியிலும் இருக்கின்றன எனப்படும். இங்கு பொதுப் பக்கம் AB ஆனது இரு இணைகரங்களுக்கும் அடியாகக் கருதப்பட்டுள்ளது.

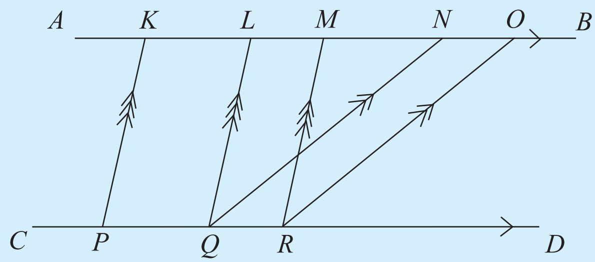
அப்பொது அடிக்கு ஒத்ததாக இரு இணைகரங்களும் ஒரே செங்குத்துத் தூரத்தில் இருக்கின்றன என்பது தெளிவாகும். அச்செங்குத்துத் தூரம் AB, DE ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரமாகும்.

உரு (ii) இல் ஓர் இணைகரமும் ஒரு முக்கோணியும் ஒரே சமாந்தரச் சோடிகளுக்கிடையே ஒரே அடியில் இருக்கும் விதம் காணப்படுகின்றது. அவை இணைகரம் $ABCD$ யும் முக்கோணி ABE யும் ஆகும். இங்கு பொதுப் பக்கம் AB ஆகும். இங்கு முக்கோணியின் ஒரு பக்கமும் அதற்கு எதிரான உச்சியும் இரண்டு சமாந்தரக் கோடுகளின் மீது அமைவதை அவதானிக்க.

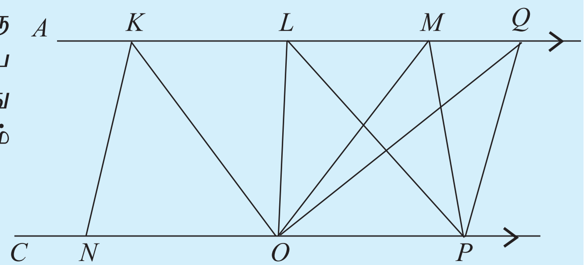
உரு (iii) இல் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே ஒரே அடி மீது இருக்கும் இரு முக்கோணிகள் உள்ளன. அவை ABC, ABD ஆகிய முக்கோணிகளுமாகும்.

பயிற்சி 8.1

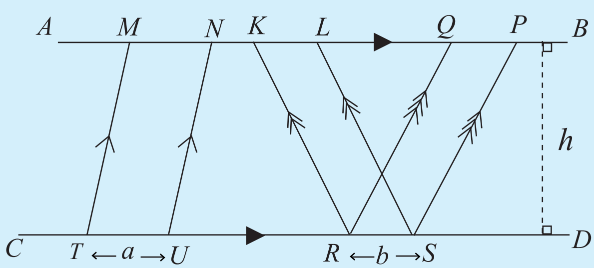
1. தரப்பட்டுள்ள உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப
   (i) நான்கு இணைகரங் களைப் பெயரிடுக.
   (ii) AB, CD ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக் கிடையே இருக்கும் பக்கம் QR ஐ அடியாகக் கொண்ட இரண்டு இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.



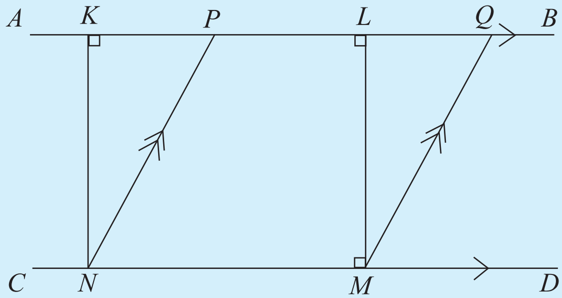
2. உருவில் AQ, CP ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கு மிடையே இருக்கும் ஒரே அடி OP இன் மீது உள்ள எல்லா முக்கோணிகளையும் எழுதுக.



3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள AB, CD என்னும் சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம் h இனாலும் ஒவ்வோர் இணைகரத்தினதும் அடியின் நீளங்கள் a, b யினாலும் காட்டப்பட்டுள்ளன. அக்குறியீடுகளைக் கொண்டு $PQRS$, $KLSR$, $MNUT$ ஆகிய இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க.



4. உருவில் AB, CD ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே செவ்வகம் $KLMN$ உம் இணைகரம் $PQMN$ உம் அமைந்துள்ளன. $NM = 10$ cm உம் $LM = 8$ cm உம் ஆகும்.



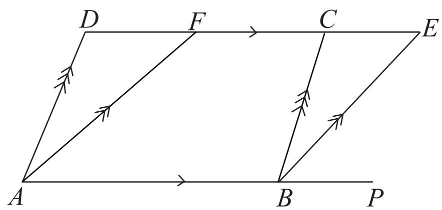
(i) செவ்வகம் $KLMN$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) இணைகரம் $PQMN$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) செவ்வகம் $KLMN$ இன் பரப்பளவுக்கும் இணைகரம் $PQMN$ இன் பரப்பளவுக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமை யாது?

8.2 ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே ஒரே அடி மீது இருக்கும் இணைகரங்களின் பரப்பளவு

அடுத்ததாக நாம் ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே அடியின்மீது இருக்கும் இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பைக் கருதுவோம். உருவில் தரப்பட்டுள்ள இரு இணைகரங்களையும் கருதுவோம்.



இங்கு $ABCD$, $ABEF$ ஆகிய இரு இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமமாவெனப் பார்ப்போம். அதற்காக முதலில்

இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = சரிவகம் $ABCF$ இன் பரப்பளவு + முக்கோணி AFD யின் பரப்பளவு

என்பதையும்

இணைகரம் $ABEF$ யின் பரப்பளவு = சரிவகம் $ABCF$ இன் பரப்பளவு + முக்கோணி BEC யின் பரப்பளவு

என்பதையும் அவதானிக்க.

ஆகவே, முக்கோணி AFD யின் பரப்பளவு = முக்கோணி BEC யின் பரப்பளவு ஆக இருந்தால் இரு இணைகரங்களினதும் பரப்பளவுகள் சமமாக இருத்தல் வேண்டுமெனக் காண்பீர்கள்.

உண்மையில் இவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைகின்றன. ஆகவே அவற்றின் பரப்பளவுகளும் சமமாகும். இவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைகின்றனவென ப.கோ.ப சந்தர்ப்பத்தைக் கருதி இவ்வாறு காட்டலாம்.

முக்கோணிகள் AFD, BEC என்பவற்றில்

$AD = BC$ (இணைகரத்தின் $ABCD$ இன் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

$AF = BE$ (இணைகரத்தின் $ABEF$ இன் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

மேலும் $D\hat{A}B = C\hat{B}P$ (ஒத்த கோணங்கள் $AD // BC$)

$F\hat{A}B = E\hat{B}P$ (ஒத்த கோணங்கள் $AF // BE$ ஆகையால்)

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் கழிக்கும்போது $D\hat{A}F = C\hat{B}E$

இதற்கேற்ப, ப.கோ.ப. சந்தர்ப்பத்தின் கீழ், AFD, BEC ஆகிய இரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைகின்றன. இதிலிருந்து, மேலே ஆராய்ந்தவாறு

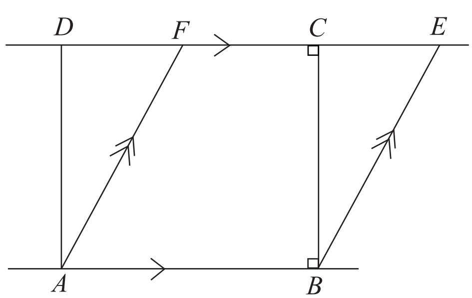
இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABEF$ இன் பரப்பளவு எனக் கிடைக்கும். இப்பேற்றை ஒரு தேற்றமாகப் பின்வருமாறு எழுதிக் காட்டுவோம்.

தேற்றம் : ஒரே அடியின் மீது, ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் இணைகரங்கள் பரப்பளவில் சமமாகும்.

இப்போது இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு முக்கியமான பேறைப் பெறுவோம் ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குப் பின்வரும் சூத்திரத்தை நீங்கள் முன்னைய தரங்களில் பயன்படுத்தியுள்ளீர்கள்.

ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவு = அடி × செங்குத்து உயரம்.

இப்போது இப்பேறு எங்ஙனம் கிடைத்தது என்பது பற்றி நீங்கள் முன்னர் சிந்தித்துப் பார்த்திருக்கிறீர்களா? இப்போது நாம் மேற்குறித்த தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி இச்சூத்திரத்தை நிறுவிக் காட்டலாம்.



இங்கே ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே, ஒரே அடி மீது இருக்கும் செவ்வகம் $ABCD$ யும் (அதாவது அது ஓர் இணைகரம்) ஓர் இணைகரம் $ABEF$ உம் உள்ளன. மேற்குறித்த தேற்றத்திற்கேற்ப அவற்றின் பரப்பளவுகள் சமம்.

ஆயினும் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு = நீளம் × அகலம் என நாம் அறிவோம்.
இதற்கேற்ப இணைகரத்தின் பரப்பளவு = செவ்வகத்தின் பரப்பளவு

$= AB \times AD$

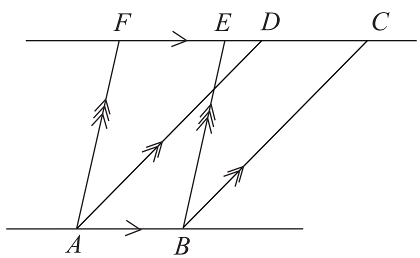
$= AB \times$ இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம்

= இணைகரத்தின் அடி × செங்குத்துத் தூரம்

இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிப்புகள் நடைபெறும் விதத்தை இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABEF$ இன் பரப்பளவு $80 cm^2$ உம் $AB = 8$ cm உம் ஆகும்.



(i) உருவில் ஒரே அடி மீது ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.
(ii) இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு யாது?
(iii) AB, FC ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்து உயரத்தைக் காண்க.

(i) $ABEF$, $ABCD$
(ii) $ABEF$, $ABCD$ ஆகியன ஒரே அடி AB மீதும் AB, FC என்னும் இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையேயும் இருப்பதனால் இணைகரங்கள் $ABEF$ இனதும் $ABCD$ யினதும் பரப்பளவுகள் சமமாகும்.

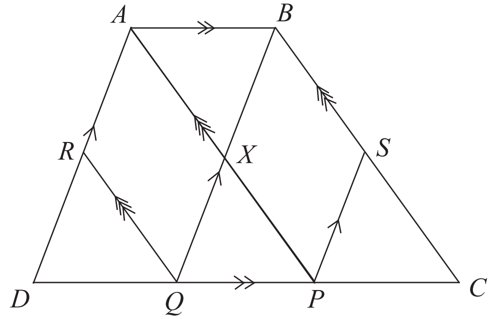
$\therefore$ இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு $80 cm^2$ ஆகும்.

(iii) சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்து உயரம் h எனக் கொள்வோம்.
அப்போது $ABEF$ இன் பரப்பளவு $= AB \times h$

$$80 = 8 \times h$$
$$h = 10$$

$\therefore$ சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்து உயரம் 10 cm ஆகும்.
இனி, இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி நிறுவல்கள் செய்யப்படும் முறையை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2



உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

(i) $ABQD$, $ABCP$ ஆகியன இணைகரங்களெனக் காட்டுக.

(ii) $ABQD$, $ABCP$ ஆகியன பரப்பளவில் சமமான இணைகரங்களெனக் காட்டுக.

(iii) $\Delta SPC \equiv \Delta DQR$ என நிறுவுக.

(iv) இணைகரம் $AXQR$ இன் பரப்பளவு = இணைகரம் $BXPS$ இன் பரப்பளவு என நிறுவுக.

(i) நாற்பக்கல் $ABQD$ யில்

$AB//DQ$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$AD//BQ$ (தரப்பட்டுள்ளது)

நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரம் ஆகையால் $ABQD$ ஓர் இணைகரமாகும். அவ்வாறே $AB//PC$, $AP//BC$ ஆகையால் $ABCP$ உம் ஓர் இணைகரமாகும்.

(ii) $ABQD$, $ABCP$ ஆகிய இரு இணைகரங்களும் ஒரே அடி AB மீது, AB, DC ஆகிய ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருப்பதனால், மேற்குறித்த தேற்றத்திற்கேற்ப அவை பரப்பளவில் சமமாகும்.

$\therefore$ இணைகரம் $ABQD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABCP$ யின் பரப்பளவு

(iii) உருவில் SPC, RDQ ஆகிய முக்கோணிகளில்

$S\hat{P}C = R\hat{D}Q$ ($SP//AD$, ஒத்த கோணங்கள்)

$S\hat{C}P = R\hat{Q}D$ ($SC//RQ$, ஒத்த கோணங்கள்)

$AB = PC$ (இணைகரம் $ABCP$ யின் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

$AB = DQ$ (இணைகரம் $ABQD$ யின் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

$PC = DQ$

$\therefore \Delta SPC \equiv \Delta DQR$ (கோ.கோ.ப.)

(iv) இணைகரம் $ABQD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABCP$ யின் பரப்பளவு (நிறுவப்பட்டது)

ΔRDQ இன் பரப்பளவு = ΔSPC யின் பரப்பளவு ($\Delta RDQ \equiv \Delta SPC$ ஆகையால்)

இணைகரம் $ABQD$ யின் பரப்பளவு − ΔRDQ வின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABCP$ யின் பரப்பளவு − ΔSPC யின் பரப்பளவு

அப்போது உருவிற்கேற்பச் சரிவகம் $ABQR$ இன் பரப்பளவு = சரிவகம் $ABSP$ யின் பரப்பளவு

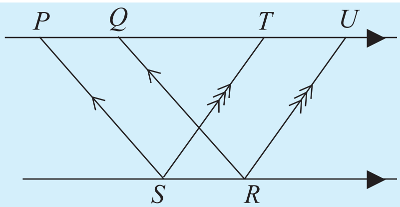
இருபக்கமும் ΔABX இன் பரப்பளவைக் கழிக்கும்போது

சரிவகம் $ABQR$ இன் பரப்பளவு − ΔABX இன் பரப்பளவு = $ABSP$ யின் பரப்பளவு − ΔABX இன் பரப்பளவு

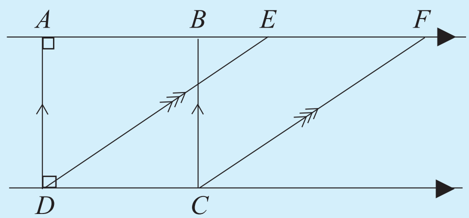
இணைகரம் $AXQR$ இன் பரப்பளவு = இணைகரம் $BXPS$ இன் பரப்பளவு

பயிற்சி 8.2

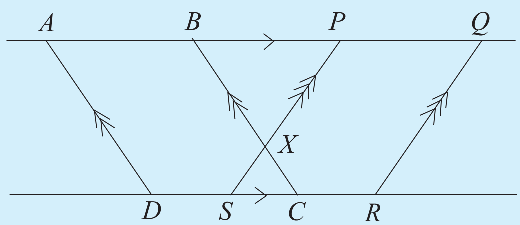
1. உருவில் PU, SR என்னும் சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் இரு இணைகரங்கள் உள்ளன. இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு 40 cm^2 ஆகும். இணைகரம் $TURS$ இன் பரப்பளவைக் கண்டு உங்கள் விடைக்குக் காரணங் காட்டுக.



2. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $ABCD$ ஒரு செவ்வகமும் $CDEF$ ஓர் இணைகரமும் ஆகும். $AD = 7$ cm, $CD = 9$ cm எனின், $CDEF$ இன் பரப்பளவைக் காரணங் களுடன் எழுதுக.



3. உருவில் AQ, DR ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே இருக்கும் $ABCD$, $PQRS$ என்னும் இரு இணை கரங்களில் $DS = CR$ எனின்,



(i) $DC = SR$ எனக் காட்டுக.

(ii) ஐங்கோணி $ABXSD$ யின் பரப்பளவு ஐங்கோணி $PQRCX$ இன் பரப்பளவுக்குச் சமமென நிறுவுக.

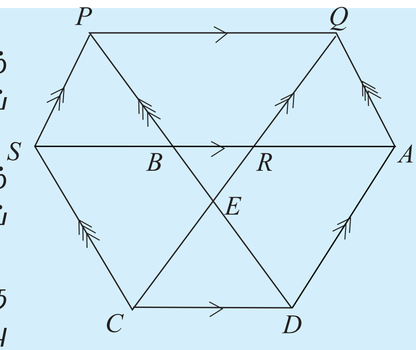
(iii) சரிவகம் $APSD$ யின் பரப்பளவு சரிவம் $BQRC$ யின் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.

4. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

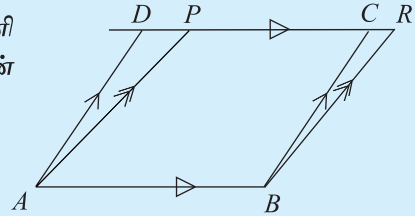
(i) இணைகரம் $PQRS$ இற்குப் பரப்பளவிற் சமமான இரு இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.

(ii) இணைகரம் $ADCR$ இற்குப் பரப்பளவிற் சமமான இரு இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.

(iii) இணைகரம் $PECS$ இன் பரப்பளவிற்கு இணைகரம் $QADE$ யின் பரப்பளவு சமமென நிறுவுக.



5. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப முக்கோணி ADP யின் பரப்பளவு முக்கோணி BRC யின் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.



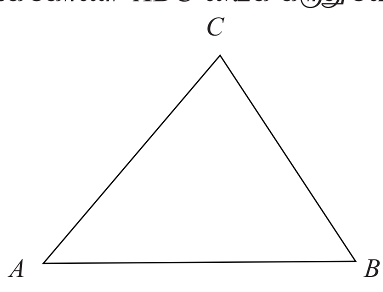
6. $AB = 6$ cm, $D\hat{A}B = 60^0$, $AD = 5$ cm ஆகவுள்ள இணைகரம் $ABCD$ யை அமைக்க. கோடு AB யில் இணைகரம் இருக்கும் பக்கத்தில் இருக்குமாறும் அதன் பரப்பளவிற்குச் சமமாக இருக்குமாறும் சாய்சதுரம் $ABEF$ ஐ அமைக்க. உங்கள் அமைப்பிற்கு நீங்கள் பயன்படுத்திய கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தைக் குறிப்பிடுக.

8.3 ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே ஒரே அடி மீது இருக்கும் இணைகரத்தினதும் முக்கோணியினதும் பரப்பளவுகள்

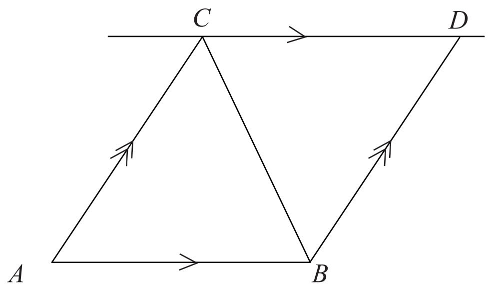
ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ள சூத்திரத்தை முன்னைய தரங்களிலிருந்தே பயன்படுத்தியுள்ளீர்கள்.

$$\text{ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவு} = \frac{1}{2} \times \text{அடி} \times \text{செங்குத்து உயரம்}$$

இப்போது நாம் இச்சூத்திரம் ஏன் பொருத்தமானது என்பதை விளக்கத் தயாராகின்றோம். கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC யைக் கருதுவோம்.



அடுத்த உருவில் தரப்பட்டுள்ளவாறு C இற்கூடாக AB யிற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு கோட்டை வரைந்து $ABDC$ இணைகரமாகுமாறு அச்சமாந்தரக் கோட்டின் மீது புள்ளி D ஐக் குறிப்போம். வேறுவிதமாக கூறுவதாயின் AB யிற்குச் சமந்தரமாக C யினூடாக வரையப்படும் கோடும் AC யிற்குச் சமாந்தரமாக C யினூடாக வரையப்படும் கோடும் இடைவெட்டும் புள்ளியை C எனப் பெயரிடுவோம்.



இப்போது முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு இணைகரம் $ABDC$ இன் பரப்பளவின் அரைமடங்காகும். ஓர் இணைகரத்தில் மூலைவிட்டத்தினால் இணைகரமானது ஒருங்கிசைவான இரண்டு முக்கோணிகளாகப் பிரிக்கப்படுவதே இதற்குக் காரணமாகும். இது பற்றித் தரம் 10 இல் இணைகரங்கள் பாடத்தில் கற்றோம்.எனவே,

முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABDC$ இன் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2} \times AB \times$ (AB, CD கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம்)

$= \frac{1}{2} \times AB \times$ செங்குத்துத் தூரம்

அதாவது முக்கோணியின் பரப்பளவுக்காக நமக்குப் பரிச்சயமான சூத்திரம் கிடைத்துள்ளது.

இங்கு நாம் அவதானித்த முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ இணைகரம் $ABDC$ இன் பரப்பளவு

என்னும் பேற்றைத் திரும்பவும் கவனிக்க. இப்பாடத்தில் 8.2 இல் ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகள் இரண்டிற்கிடையே ஒரே அடியின் மீதுள்ள இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமம் எனக் கற்றோம். எனவே மேற்குறித்த உருவிற்கேற்ப, AB, CD ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே அடி AB இன் மீதுள்ள வேறு எந்த இணைகரத்தினதும் பரப்பளவும் இணைகரம் $ABDC$ இன் பரப்பளவுக்குச் சமனாகும் அதாவது,

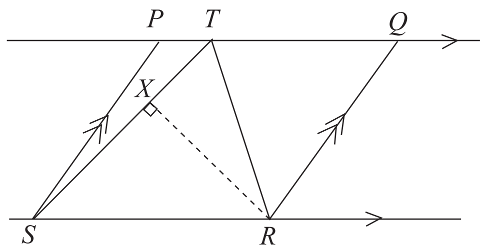
முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ (AB, CD சாமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே அடி AB மீதுள்ள எந்வோர் இணைகரத் தினதும் பரப்பளவு)

இப்பேறு ஒரு தேற்றமாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம்: ஒரு முக்கோணியும் ஓர் இணைகரமும் ஒரே அடியின் மீதும் ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருப்பின், முக்கோணியின் பரப்பளவு அவ்விணைகரத்தின் பரப்பளவில் அரைப்பங்காகும்.

இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிப்புகள் செய்யப்படும் விதம்பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1



உருவில் ஓர் இணைகரம் $PQRS$ உம் ஒரு முக்கோணி STR உம் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே ஒரே அடி மீது உள்ளன. இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு 60 cm^2 ஆகும்.

(i) முக்கோணி STR இன் பரப்பளவைக் காண்க. உங்கள் விடைக்குக் காரணம் தருக.
(ii) $ST = 6$ cm எனின், R இலிருந்து ST இற்கான செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க.

(i) இணைகரம் $PQRS$ உம் முக்கோணி STR உம் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருப்பதோடு அதே வேளை ஒரே அடி மீதும் உள்ளன. ஆகவே முக்கோணி STR இன் பரப்பளவு இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவில் அரைப்பங்காகும்.

$\therefore \Delta STR$ இன் பரப்பளவு $= 30 \text{ cm}^2$

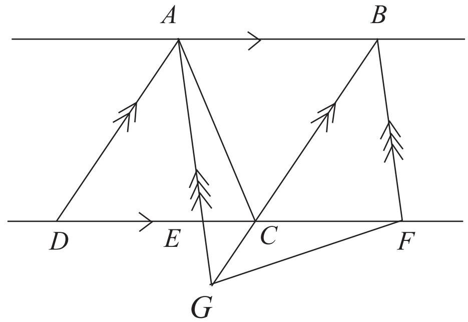
(ii) முக்கோணி STR இன் பரப்பளவு $= \dfrac{1}{2} \times ST \times RX$

$$30 = \frac{1}{2} \times 6 \times RX$$

$$RX = 10 \text{ cm}$$

$\therefore$ R இதிலிருந்து ST இற்கான செங்குத்துத் தூரம் 10 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2



E ஆனது இணைகரம் $ABCD$ இன் பக்கம் DC மீது உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். AE யிற்குச் சமாந்தரமாக B யிலிருந்து வரைந்த கோடு நீட்டப்பட்ட பக்கம் DC யை F இல் சந்திக்கின்றது. நீட்டப்பட்ட AE ஆனது நீட்டப்பட்ட கோடு BC யை G யிற் சந்திக்கின்றது.

(i) $ABFE$ ஓர் இணைகரம் எனவும்
(ii) $ABCD$, $ABFE$ ஆகிய இணைகரங்கள் பரப்பளவிற் சமம் எனவும்
(iii) முக்கோணி ACD யின் பரப்பளவு = முக்கோணி BFG யின் பரப்பளவு எனவும் நிறுவுக.

நிறுவல்

(i) நாற்பக்கல் $ABFE$ யில்
$AE//BF$ (தரப்பட்டுள்ளது)
$AB//EF$ (தரப்பட்டுள்ளது)
$\therefore$ $ABFE$ ஓர் இணைகரம் (எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரம் ஆகையால்)

(ii) $ABCD$, $ABFE$ ஆகிய இரு இணைகரங்களும் AB, DF ஆகிய ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையேயும் ஒரே அடி AB இன் மீதும் உள்ளன.
$\therefore$ தேற்றத்திற்கேற்ப இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABFE$ யின் பரப்பளவு

(iii) இணைகரம் $ABCD$ யும் முக்கோணி ACD யும் DC, AB ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்குமிடையேயும் ஒரே அடி DC மீதும் உள்ளன.
$\therefore$ தேற்றத்திற்கேற்ப $\frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு $= \Delta\, ACD$ யின் பரப்பளவு

அவ்வாறே இணைகரம் $ABFE$ யும் முக்கோணி BFG யும் BF, AG ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையேயும் ஒரே அடி BF மீதும் உள்ளன.

அப்போது $\frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABFE$ யின் பரப்பளவு $= \Delta BFG$ யின் பரப்பளவு

ஆனால், இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABFE$ யின் பரப்பளவு

ஆகையால், $\frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABFE$ யின் பரப்பளவு

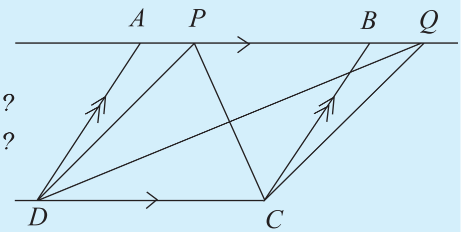
$\therefore$ முக்கோணி ACD யின் பரப்பளவு = முக்கோணி BFG யின் பரப்பளவு

பயிற்சி 8.3

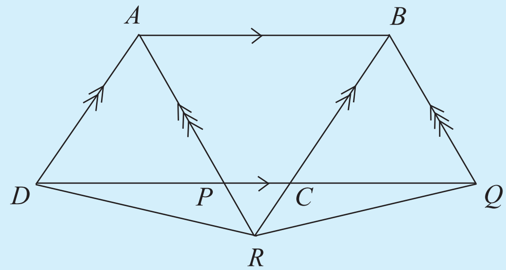
1. உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு 50 cm^2 ஆகும்.

(i) முக்கோணி PDC யின் பரப்பளவு யாது?

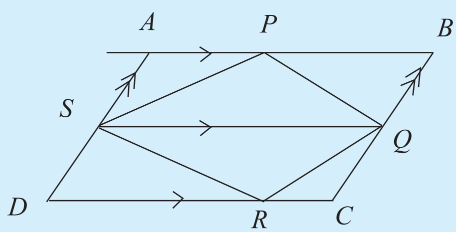
(ii) முக்கோணி DCQ வின் பரப்பளவு யாது?



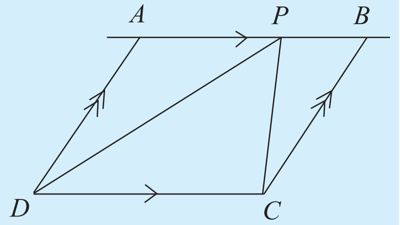
2. இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் DC மீது புள்ளி P உள்ளது. AP யிற்குச் சமாந்தரமாக B யினூடாக வரையப் பட்டுள்ள கோடு நீட்டப்பட்ட பக்கம் DC யை Q இற் சந்திக்கின்றது. நீட்டப் பட்ட AP யும் நீட்டப்பட்ட பக்கம் BC யும் R இற் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி ADR இன் பரப்பளவு முக்கோணி BQR இன் பரப்பளவுக்குச் சமமென நிறுவுக.



3. உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் AD யை S இலும் பக்கம் BC யை Q இலும் சந்திக்குமாறு AB யிற்குச் சமாந்தரமாக SQ வரையப்பட்டுள்ளது. நாற்பக்கல் $PQRS$ இன் பரப்பளவு இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவின் அரைப்பங்கு என நிறுவுக.

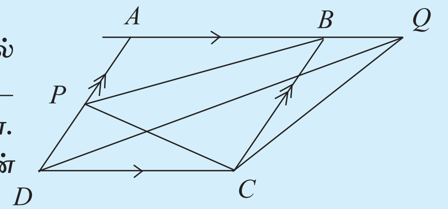


4. P ஆனது உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABCD$ யின் பக்கம் AB மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியாகும்.

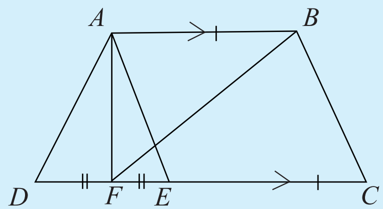


ΔAPD யின் பரப்பளவு $+$ ΔBPC யின் பரப்பளவு $=$ ΔDPC யின் பரப்பளவு என நிறுவுக.

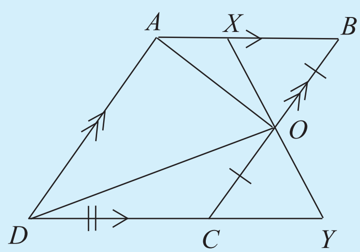
5. உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் AD மீது புள்ளி P யும் நீட்டப்பட்ட பக்கம் AB மீது புள்ளி Q வும் உள்ளன. ΔCPB யின் பரப்பளவு $=$ ΔCQD யின் பரப்பளவு என நிறுவுக.



6. சரிவகம் $ABCD$ யில் $AB \parallel CD$, $DC > AB$ ஆகும். $AB = CE$ ஆக இருக்குமாறு பக்கம் DC மீது புள்ளி E உள்ளது. முக்கோணி AFE யின் பரப்பளவு முக்கோணி ADF இன் பரப்பளவுக்குச் சமமாக இருக்குமாறு பக்கம் DE மீது புள்ளி F உள்ளது. சரிவகம் $ABFD$ யின் பரப்பளவு சரிவகம் $ABCD$ யின் பரப்பளவின் அரைப்பங்கென நிறுவுக.



7. இணைகரம் $ABCD$ யின் பக்கம் BC யின் நடுப் புள்ளி O ஆகும். X என்பது பக்கம் AB மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியாகும் நீட்டப்பட்ட XO வும் நீட்டப்பட்ட DC யும் Y யிற் சந்திக்கின்றன.



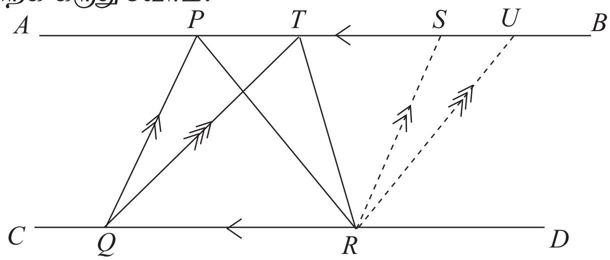
(i) ΔBOX இன் பரப்பளவு $=$ ΔCOY யின் பரப்பளவு எனவும்

(ii) சரிவகம் $AXYD$ யின் பரப்பளவு $=$ சரிவகம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு எனவும்

(iii) சரிவகம் $AXYD$ யின் பரப்பளவு முக்கோணி ADO வின் பரப்பளவின் இரு மடங்கு எனவும் நிறுவுக.

8.4 ஒரே சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே, ஒரே அடி மீது உள்ள முக்கோணிகளின் பரப்பளவு

தரப்பட்டுள்ள உருவில் AB, CD ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையில் QR என்னும் ஒரே அடியைக் கொண்டு அமைந்திருக்கும் எந்தவொரு முக்கோணிகளுமான PQR, TQR என்பவற்றைக் கருதுவோம்.



முக்கோணி PQR இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு

முக்கோணி TQR இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $TQRU$ இன் பரப்பளவு

ஆனால் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையேயும் QR ஒரே அடி மீதும் அமைந்துள்ளதால் தேற்றத்துக்கமைய

இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு = இணைகரம் $TQRU$ இன் பரப்பளவு

$\therefore \frac{1}{2}$ இணைகரம் $PQRS$ யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $TQRU$ யின் பரப்பளவு

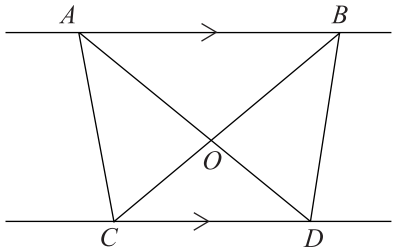
$\therefore$ முக்கோணி PQR இன் பரப்பளவு = முக்கோணி TQR இன் பரப்பளவு

QR ஒரே அடியைக் கொண்டு PU, QR என்னும் ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே அமைந்த முக்கோணி PQR, முக்கோணி TQR எனபவற்றின் பரப்பளவுகள் சமனாகின்றன. இதனைப் பின்வருமாறு ஒரு தேற்றமாகக் காட்டலாம்.

தேற்றம்: ஒரே அடி மீதும் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்குமிடையே இருக்கும் முக்கோணிகள் பரப்பளவிற் சமமாகும்.

இங்கு இனங்கண்ட தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்கள் தீர்க்கப்படும் விதத்தைப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1



உருவில் $AB//CD$ ஆகும்.

(i) முக்கோணி ACD யிற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு முக்கோணியைப் பெயரிடுவதற்கு ஏதுவான கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தை எழுதுக.

(ii) முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு 30 cm^2 எனின், முக்கோணி ABD யின் பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) முக்கோணி AOC யின் பரப்பளவு, முக்கோணி BOD யின் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.

(i) முக்கோணி BCD

ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகள் சமம்.

(ii) முக்கோணி ABD யின் பரப்பளவு $= 30\text{ cm}^2$

(iii) $\Delta ACD = \Delta BCD$ (ஒரே அடி CD ; $AB//CD$)

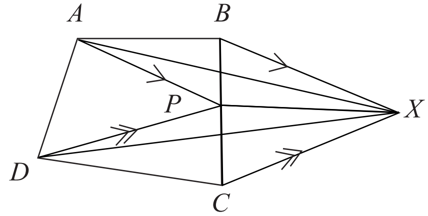
உருவிற்கேற்ப இவ்விரு முக்கோணிகளுக்கும் ΔCOD பொதுவாகும். அப்பகுதியை நீக்கும்போது

$$\Delta ACD - \Delta COD = \Delta BCD - \Delta COD$$
$$\therefore \Delta AOC = \Delta BOD$$

உதாரணம் 2

நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் பக்கம் BC மீது புள்ளி P உள்ளது. AP யிற்குச் சமாந்தரமாக B யினூடாக வரையப்பட்டுள்ள கோடும் DP யிற்குச் சமாந்தரமாக C யினூடாக வரையப்பட்டுள்ள கோடும் X இற் சந்திக்கின்றன.

ΔADX இன் பரப்பளவு நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.



நிறுவல் : AP, BX ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் அதேவேளை அடி AP மீது APB, APX ஆகிய முக்கோணிகள் இருக்கின்றமையால், தேற்றத்திற்கேற்ப

$\Delta APB = \Delta APX$ ——— (1)

அவ்வாறே $DP//CX$ ஆகையால்,

$\Delta DPC = \Delta DPX$ ——— (2)

(1) + (2), $\Delta ABP + \Delta DPC = \Delta APX + \Delta DPX$

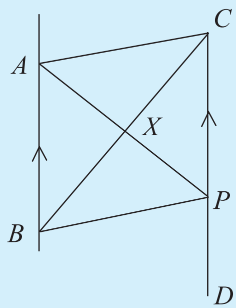
இரு பக்கங்களுடனும் ΔADP இன் பரப்பளவைக் கூட்டுவோம்.

அப்போது $\Delta ABP + \Delta DPC + \Delta ADP = \Delta APX + \Delta DPX + \Delta ADP$

நாற்பக்கல் $ABCD = \Delta ADX$

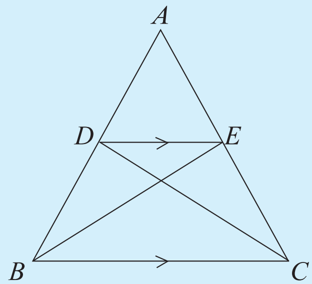
பயிற்சி 8.4

1. உருவில் உள்ள AB, CD ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே இருக்கும் முக்கோணி ABP யின் பரப்பளவு 25 cm^2 ஆகும்.



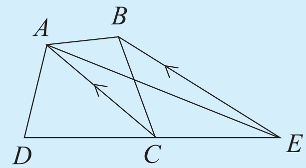
(i) முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு யாது?
(ii) முக்கோணி ABX இன் பரப்பளவு 10 cm^2 எனின், முக்கோணி ACX இன் பரப்பளவு யாது?
(iii) ACX, BPX ஆகிய முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகளுக் கிடையே உள்ள தொடர்பு யாது?

2. முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AB யை D யிலும் பக்கம் AC யை E யிலும் சந்திக்குமாறு BC யிற்குச் சமாந்தரமாக DE வரையப்பட்டுள்ளது.



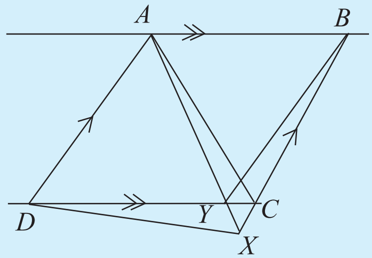
(i) ΔBED யிற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு முக்கோணியைப் பெயரிடுக.
(ii) ΔABE யும் ΔADC யும் பரப்பளவிற் சமமென நிறுவுக.

3. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் மூலைவிட்டம் AC யிற்குச் சமாந்தரமாக B யினூடாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு நீட்டப்பட்ட DC யை E யிற் சந்திக்கின்றது.



(i) ΔABC யிற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு முக்கோணியைப் பெயரிடுக. விடைக்குக் காரணங் காட்டுக.
(ii) நாற்பக்கல் $ABCD$ யின் பரப்பளவு முக்கோணி ADE யின் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.

4. இணைகரம் $ABCD$ யில் A யிலிருந்து வரையப்பட்டுள்ள யாதாயினும் ஒரு கோடு பக்கம் DC யை Y யிலும் நீட்டப்பட்ட பக்கம் BC யை X இலும் இடைவெட்டுகின்றது.
   (i) ΔDYX, ΔAYC ஆகியன பரப்பளவிற் சமம் என நிறுவுக.
   (ii) ΔBCY, ΔDYX ஆகியன பரப்பளவிற் சமம் என நிறுவுக.



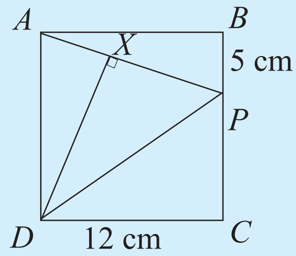
5. இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் BC மீது புள்ளி Y உள்ளது. நீட்டப்பட்ட கோடு AB யும் நீட்டப்பட்ட கோடு DY யும் X இற் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி AXY இன் பரப்பளவு முக்கோணி BCX இன் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.

6. BC என்பது 8 cm நீளமுள்ள ஒரு நிலைத்த நேர்கோட்டுத் துண்டமாகும். முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு 40 cm^2 ஆக இருக்குமாறு புள்ளி A யின் ஒழுக்கை ஒரு பரும்படிப் படத்தின் மூலம் விவரிக்க.

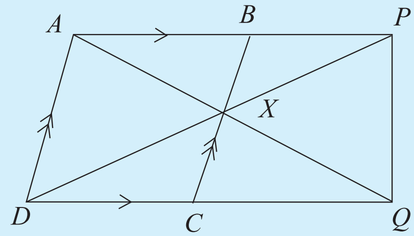
7. $AB = 8$ cm, $AC = 7$ cm, $BC = 4$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC யை அமைக்க. AB யிலிருந்து C இருக்கும் பக்கத்தில் P இருக்குமாறும் பரப்பளவில் முக்கோணி ABC யிற்குச் சமமாக இருக்குமாறும் $PA = PB$ ஆக இருக்குமாறும் உள்ள முக்கோணி PAB யை அமைக்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. சதுரம் $ABCD$ யின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 12 cm ஆகும். $BP = 5$ cm ஆக இருக்குமாறு பக்கம் BC மீது புள்ளி P உள்ளது. D யில் இருந்து AP யிற்கு வரைந்த செங்குத்தின் அடி X ஆகும். DX இன் நீளத்தைக் காண்க.



2. X என்பது இணைகரம் $ABCD$ யின் பக்கம் BC மீது உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். நீட்டப் பட்ட DX ஆனது நீட்டப்பட்ட பக்கம் AB யை P யிலும் நீட்டப்பட்ட AX ஆனது நீட்டப்பட்ட DC யை Q விலும் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி PXQ வின் பரப்பளவு இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவில் அரைப்பங்கென நிறுவுக.



3. இணைகரம் $PQRS$ இன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று O இல் இடைவெட்டுகின்றன. பக்கம் SR மீது புள்ளி A உள்ளது. முக்கோணி POQ வினதும் முக்கோணி PAQ வினதும் பரப்பளவுகளுக்கிடையே உள்ள விகிதத்தைக் காண்க. (உதவி : பொருத்தமான அமைப்பைப் பயன்படுத்தவும்)

4. $ABCD$, $ABEF$ ஆகியன பக்கம் AB யின் இரு பக்கங்களிலும் வரையப்பட்ட பரப்பளவிற் சமமற்ற இரு இணைகரங்களாகும்.

(i) $DCEF$ ஓர் இணைகரம் எனவும்

(ii) இணைகரம் $DCEF$ இன் பரப்பளவு $ABCD$, $ABEF$ ஆகிய இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம் எனவும்

நிறுவுக.

5. இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் AB யை E யிலும் பக்கம் AD யை F இலும் இடைவெட்டுமாறு BD யிற்குச் சமாந்தரமாக EF வரையப்பட்டுள்ளது. (உதவி : பொருத்தமான அமைப்பைப் பயன்படுத்தவும்)

(i) ΔBEC யும் ΔDFC யும் பரப்ளவிற் சமம் எனவும்

(ii) ΔAEC யும் ΔAFC யும் பரப்பளவிற் சமம் எனவும்

நிறுவுக

மீட்டற் பயிற்சி

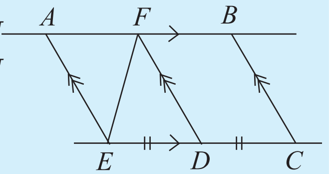
1 ஆம் தவணை

பகுதி I

1. பெறுமானங் காண்க. $2\sqrt{3} - \sqrt{3}$

2. $10^{0.5247} = 3.348$ ஆயின் lg 0.3348 இன் பெறுமானங் காண்க.

3. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப முக்கோணி AFE இன் பரப்பளவானது உரு $ABCE$ பரப்பளவின் என்ன பின்னமாகும் ?



4. $A^3 = x^3 - y^3 + 3x^2y - 3xy^2$ ஆயின் A இன் பெறுமானத்தை x, y என்பவற்றின் சார்பில் தருக.

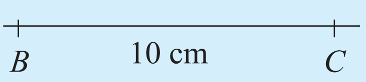
5. ஒரே அளவிலான இரண்டு சதுரச் செங்கூம்பகங்களின் சதுரவடிவ முகங்கள் ஒன்றுட னொன்று ஒட்டப்பட்டு ஒரு எண்முகி செய்யப்பட்டுள்ளது. அதன் மொத்த மேற்பரப்பளவு 384 cm^2 ஆயின், சதுரக் கூம்பகத்தின் ஒரு முக்கோண முகத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

6. சுருக்குக. $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{1-x}$

7. பெறுமானங் காண்க. $\log_3 27 - \log_4 16$

8. 1cm^3 இன் திணிவு 4g ஆகவுள்ள ஒரு விசேட பதார்த்தத்தினால் தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு திண்மக் கோளத்தின் திணிவு 120 g ஆகும். அக்கோளத்தின் கனவளவைக் காண்க.

9. உருவில் ஒன்றுக்கொன்று 10 cm தூரத்தில் அமைந்துள்ள B, C என்னும் நிலையான புள்ளிகள் தரப்பட்டுள்ளன. முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு 20 cm^2 ஆகுமாறு புள்ளி A இன் ஒழுக்கைப் பருமட்டாக வரைக.

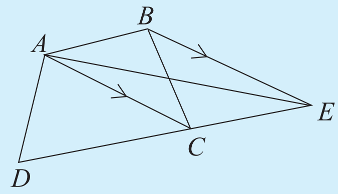


10. lg 5 = 0.6990 எனின் lg 2 இன் பெறுமானங் காண்க.

11. விட்டத்திற்குச் சமனான உயரத்தையுடைய ஓர் உருளையின் வளைந்த மேற் பரப்பின் பரப்பளவு அதே விட்டத்தையுடைய ஒரு கோளத்தின் கனவளவுக்குச் சமமானது எனக் காட்டுக.

12. $\sqrt{5} = 2.23$ எனக் கொண்டு $\sqrt{20}$ இன் பெறுமானங் காண்க.

13. உருவிலுள்ள நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் பரப்பளவு முக்கோணி ADE இன் பரப்பளவுக்குச் சமமானது எனக் காட்டுக.



14. பெறுமானங் காண்க. $\sqrt{75} \times 2\sqrt{3}$

15. சுருக்குக. $\dfrac{3x}{x^2-1} \times \dfrac{x(x-1)}{3}$

பகுதி II

1. (i) $x + \dfrac{1}{x} = 3$ ஆயின் $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ இன் பெறுமானங் காண்க.

   (ii) சுருக்குக. $\dfrac{m^2 - 4n^2}{mn(m+2n)} \div \dfrac{m^2 - 4mn + 4n^2}{m^2n^2}$

2. (i) x இன் எப்பெறுமானத்திற்கு $2 \lg x = \lg 3 + \lg(2x-3)$ ஆகும்?

   (ii) x இன் பெறுமானங் காண்க. $2 \lg x + \lg 32 - \lg 8 = 2$

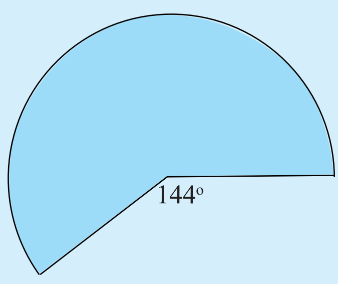
   (iii) மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாது பெறுமானங் காண்க.

$$\log_2 \frac{3}{4} - 2\log_2\left(\frac{3}{16}\right) + \log_2 12 - 2$$

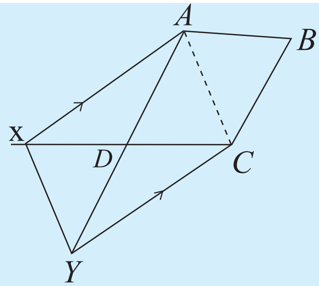
   (iv) மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கி விடையை இரண்டு தசமதானங்களுக்குத் தருக.

$$\frac{\sqrt{0.835} \times 0.75^2}{4.561}$$

3. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள ஆரை r ஐயும் மையம் o வையும் உடைய உலோக அடரில் இருந்து சாயுயரம் r உம் உச்சி o வையும் உடைய செவ்வட்டக் கூம்பு ஒன்று ஆக்கப்படுகின்றது. ஆரை a ஆகவுடைய n கோளவடிவ பனிக்கட்டிகள் (தலைக் கீழாகப் பிடிக்கப்பட்ட) இக்கூம்பினுள் இடப்படுகின்றது. பனிக்கட்டி உருகும்போது கூம்பு முற்றாக நீரில் நிரம்புகின்றது எனின், எனக் காட்டுக.



4.(a) உருவிலுள்ள இணைகரம் $ABCD$ இன் பக்கம் CD ஆனது X வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. AX இற்குச் சமாந்தரமாகுமாறு C இனூடாக வரைந்த கோட்டை நீட்டப்பட்ட AD ஆனது Y இல் சந்திக்கின்றது.



(i) முக்கோணி AXY இன் பரப்பளவிற்குச் சமனான பரப்பளவுடைய ஒரு முக்கோணியைப் பெயரிடுக. உமது விடைக்கான காரணத்தைத் தருக.

(ii) முக்கோணி XDY இன் பரப்பளவின் இருமடங்கானது இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு என நிறுவுக.

(b) கவராயம், நேர்விளிம்பு cm/mm ஆகியவற்றை மாத்திரம் பயன்படுத்தி

(i) $AB = 5.5$ cm, $A\hat{B}C = 60^{\circ}$, $BC = 4.2$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க.

(ii) முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவின் இருமடங்கு பரப்பளவுடைய சாய்சதுரம் $ABPQ$ ஐ அமைக்க.

5. இணைகரம் $ABCD$ இல் O என்பது BC இன் மீது அமைந்துள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளியாகும். DO இற்குச் சமாந்தரமாக A இனூடாக வரையப்பட்ட கோடு CB ஐ P இல் சந்திக்கின்றது. நீட்டப்பட்ட கோடு AO ஆனது நீட்டப்பட்ட கோடு DC ஐ Q இல் சந்திக்கின்றது.

(i) தரப்பட்டுள்ள தகவல்களை உள்ளடக்கி பருமட்டான ஒரு படம் வரைக.

(ii) இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவிற்கும் முக்கோணி ADO இன் பரப்பளவிற்கும் இடையிலான தொடர்பை எழுதுக.

(iii) முக்கோணி ABP இன் பரப்பளவானது முக்கோாணி BOQ இன் பரப்பளவிற்குச் சமமானது என நிறுவுக.

6. ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் அடியின் ஆரை 7 cm உம் செங்குத்துயரம் 12 cm உம் ஆகும்.

(i) கூம்பின் கனவளவைக் காண்க.

(ii) கூம்பின் ஆரையை மாற்றாது செங்குத்துயரத்தை இருமடங்காக மாற்றினால் இக்கூம்பின் கனவளவு முன்னைய கூம்பின் கனவளவின் எத்தனை மடங்காகும்.

(iii) முன்னைய கூம்பின் செங்குத்துயரத்தை மாற்றாது அடியின் ஆரையை இருமடங்காக மாற்றினால், அக்கூம்பின் கனவளவு முன்னைய கூம்பின் கனவளவின் எத்தனை மடங்காகும்.

ලඝුගණක

மடக்கைகள்

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ලඝුගණක
மடக்கைகள்
LOGARITHMS

											මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

09

சதவீதம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- குறைந்து செல்லும் மீதி முறையில் கடன் தவணைத் தொகைகளைக் கணிப்பதற்கும்
- குறைந்து செல்லும் மீதி முறையில் வட்டி வீதத்தைக் கணிப்பதற்கும்
- கூட்டு வட்டி தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

சதவீதங்கள் தொடர்பாக நீங்கள் இதுவரைக்கும் கற்ற விடயங்களை மீண்டும் நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பெறுமானம் காண்க.
a. ரூ. 800 இன் 12%
b. 1 கிலோமீற்றரின் 8%
c. 1200 கிராமின் 2.5%
d. 2.5 லீற்றரின் 25%

2. ரூ. 500 இற்கு வாங்கிய ஒரு கைக்கடிகாரத்தை ரூ. 600 இற்கு விற்கும் ஒரு வர்த்தகருக்குக் கிடைக்கும் இலாபச் சதவீதத்தைக் கணிக்க.

3. ரூ. 8 000 ஐ 6% ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்திற்குக் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் ஓர் ஆண்டிற்காகச் செலுத்த வேண்டிய வட்டியைக் கணிக்க.

4. ரூ. 5 000 ஐ 10% ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்தின் கீழ் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் 2 ஆண்டுகளுக்கு பின்னர் செலுத்த நேரிடும் மொத்த வட்டியைக் கணிக்க.

5. 2% மாத எளிய வட்டி வீதத்தின் கீழ் ரூ. 10 000 ஐக் கடனாகப் பெற்ற மோகன் 3 மாதங்களுக்குப் பின்னர் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்குச் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் யாது?

அறிமுகம்

நாம் தினசரி வாழ்வில் செய்யும் செலவுகளை மீண்டெழும் செலவுகள், மூலதனச் செலவுகள் என இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். மறுபடியும் நேரிடும் செலவுகள் மீண்டெழும் செலவுகள் எனப்படும். உதாரணங்களாக உணவு, உடை, மருந்து, மின் சிட்டைக் கொடுப்பனவுகளுக்காகச் செய்யப்படும் செலவுகளை மீண்டெழும் செலவுகளுக்காகக் காட்டலாம்.

மீண்டும் மீண்டும் தாங்க நேரிடாத செலவுகள் மூலதனச் செலவுகள் எனப்படும். உதாரணமாக நாம் காணி, வீடு, வாகனம், பொறித்தொகுதி, தளபாடம் ஆகியவற்றைக் கொள்வனவு செய்வதற்காகச் செய்யப்படும் செலவுகளை மூலதனச் செலவுகளாகக் காட்டலாம். அத்தகைய செலவுகள் அளவில் பெரியன ஆகையால் அதற்காகத் தேவையான பணத்தைப் பல சந்தர்ப்பங்களில் நிதி நிறுவகமொன்றிலிருந்து அல்லது பணியாற்றும் சேவை நிலையத்திலிருந்து கடனாகப் பெறுதல் நேரிடுகின்றது.

அவ்வாறு பெறும் கடனை ஒரே தடவையில் திரும்பச் செலுத்தல் பொதுவாக நடைபெறாத அதே வேளை நெடுங்காலத்தில் மாதந்தோறும் பகுதிகளாகச் செலுத்தல் நடைபெறுகின்றது. மேலும் அத்தகைய கடனைப் பெறும்போது கடனுக்கு மேலதிகமாக வட்டியைச் செலுத்த நேரிடுகின்றது. மாதந்தோறும் செலுத்த நேரிடும் கடன் பகுதியும் வட்டியும் சேர்ந்து கடன் தவணைத்தொகை எனப்படும்.

எனினும் சில நிறுவகங்கள் தமது நிறுவகத்தின் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்படும் அல்லது கொண்டு வந்து விநியோகிக்கப்படும் பொருள்களின் சந்தைப்படுத்தலைக் கூட்டுவதற்கு வட்டி இல்லாத கடனை மாத்திரம் தவணைத்தொகைகளாகச் செலுத்தத்தக்கதாகப் பொருள்கள் விற்பனை செய்யப்படும் சந்தர்ப்பங்களையும் காணலாம்.

உதாரணம் 1

தளவாட உற்பத்திக் கம்பனி ஒன்றின் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்படும் ரூ. 30 000 பெறுமானமுள்ள ஒரு மர அலுமாரி வட்டி இல்லாத 12 மாதத் தவணைத் தொகைகளில் செலுத்தும் நிபந்தனை மீது விற்பனை செய்யப்படுகின்றது. மாதந்தோறும் செலுத்த வேண்டிய கடன் தவணைத்தொகை யாது?

ஒரு கடன் தவணைத்தொகையின் பெறுமானம் = ரூ. $\frac{30\,000}{12}$

= ரூ. 2 500

உதாரணம் 2

ஓர் அரசாங்க நிறுவகத்தில் பணியாற்றும் ஒருவருக்கு விழா முற்பணமாக ரூ. 5 000 வழங்கப்படும் அதே வேளை அப்பணம் வட்டி இல்லாமல் 10 மாதத் தவணைத்தொகைகளாகச் செலுத்தி முடிக்கப்பட வேண்டும். அப்பணம் மாதந்தோறும் சம்பளத்திலிருந்து கழிக்கப்படுமெனின், மாதந்தோறும் சம்பளத்திலிருந்து கழிக்கப் படும் பணம் யாது?

மாதந்தோறும் சம்பளத்திலிருந்து கழிக்கப்படும் பணம் $=$ ரூ. $\dfrac{5\ 000}{10}$

$=$ ரூ. 500

9.1 குறைந்து செல்லும் மீதி முறையின் கீழ் வட்டியைக் கணித்தல்

வட்டி அறவிடப்படும் சந்தர்ப்பங்களில் வட்டியைக் கணிக்கும் முறைகள் பல்வேறு வகைப்படும். குறைந்து செல்லும் மீதி முறையின் கீழ் வட்டியைக் கணித்தல் மிகவும் பொதுவான முறையாகும். அதனைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

மாதத் தவணைத்தொகைகளாகத் திரும்பச் செலுத்துவதற்கு ஒரு குறித்த நிறுவகத்திலிருந்து கடனைப் பெறும்போது அல்லது ஒரு பொருளின் பெறுமானத்தில் ஒரு பகுதியைப் பணமாகச் செலுத்தி மீதிப் பணத்தை மாதத் தவணைத்தொகைகளின் மூலம் திரும்பச் செலுத்துவதன் பேரில் பொருள்களை வாங்கும்போது பெரும்பாலான சந்தர்ப்பங்களில் கடனுக்கு மேலதிகமாக வட்டியும் செலுத்த நேரிடுகின்றது.

இம்முறையின் கீழ் ஒவ்வொரு மாதத்திலும் கடனின் ஒரு பகுதி செலுத்தப்படுகின்றது. செலுத்தப்படவுள்ள கடனுக்காக வட்டி கணிக்கப்படுகின்றது. ஆகவே செலுத்துவதற்கு உள்ள கடன் மாதந்தோறும் குறைகின்றமையால் வட்டி மாதந்தோறும் கணிக்கப்படுதல் குறைந்து செல்லும் மீதி முறையின் கீழ் வட்டியைக் கணித்தல் எனப்படும். இவ்வாறு கணித்த பின்னர் ஒவ்வொரு மாதமும் ஒரே தொகைப் பணத்தைத் தவணைப் பணமாகச் செலுத்தக்கூடியவாறு மாதத் தவணைப் பெறுமானம் பெறப்படும்.

குறைந்து செல்லும் மீதி முறையின் கீழ் வட்டி கணிக்கப்படும் விதத்தையும் மாதத் தவணைப் பெறுமானத்தை அறியும் முறையையும் விளங்கிக் கொள்வதற்குப் பின்வரும் உதாரணங்களைப் பரிசீலியுங்கள்.

உதாரணம் 1

திரு சேகர் 24% ஆண்டு வட்டி அறவிடப்படும் ஒரு வங்கியிலிருந்து ஒரு வியாபாரக் கடனாக ரூ. 30 000 பணத்தைப் பெற்றுள்ளார். அக்கடனை 6 சமனான மாதத் தவணைத்தொகைகளில் செலுத்தி முடிக்க வேண்டிய அதே வேளை குறைந்து செல்லும் மீதி முறையில் வட்டி அறவிடப்படுமெனின், அவர் செலுத்த வேண்டிய ஒரு மாதத் தவணைத்தொகையின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

பெற்றுள்ள கடன் = ரூ. 30 000

வட்டியில்லாத ஒரு கடன் தவணைத்தொகையின் பெறுமானம் = ரூ. $\frac{30\ 000}{6}$

= ரூ. 5 000

இம்முறைக்கு ஒவ்வொரு மாதத்திலும் கடன் மீதி ரூ. 5000 வீதம் குறையும் அதே வேளை வட்டி எஞ்சியிருக்கும் கடன் தொகைக்கு அறவிடப்படுகின்றது.

அறவிடப்படும் ஆண்டு வட்டி வீதம் = 24%

அதற்கேற்ப மாத வட்டி வீதம் = 2%

முதல் மாதத்திற்கான வட்டி = ரூ. 30 000 × $\frac{2}{100}$

= ரூ. 600

இரண்டாம் மாதத்திற்கான வட்டி = 25 000 × $\frac{2}{100}$

= ரூ. 500

மூன்றாம் மாதத்திற்கான வட்டி = 20 000 × $\frac{2}{100}$

= ரூ. 400

நான்காம் மாதத்திற்கான வட்டி = 15 000 × $\frac{2}{100}$

= ரூ. 300

ஐந்தாம் மாதத்திற்கான வட்டி = 10 000 × $\frac{2}{100}$

= ரூ. 200

ஆறாம் மாதத்திற்கான வட்டி = 5 000 × $\frac{2}{100}$

= ரூ. 100

இதற்கேற்பச் செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டி = ரூ. (600 + 500 + 400 + 300 + 200 + 100)

= ரூ. 2 100

அப்போது செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் = ரூ. (30 000 + 2 100)

= ரூ. 32 100

∴ ஒரு மாதத் தவணைத்தொகையின் பெறுமானம் = ரூ. (32 100 ÷ 6)

= ரூ. 5 350

மேலே காட்டப்பட்டுள்ள முறையில் வட்டியைக் கணிப்பின் நீண்ட முறையும் அதிக காலமும் செலவிடப்படுகின்றது. ஆகவே எளிதாக வட்டியைக் கணிப்பதற்குப் பின்வரும் முறையியலைப் பார்ப்போம்.

ஒரு மாதத்தில் செலுத்த வேண்டிய ஒரு கடன் பகுதிக்கு வட்டி = ரூ. $5\,000 \times \frac{2}{100}$
= ரூ. 100

இதற்கேற்பச்

செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டி = ரூ. $100 \times 6 + 100 \times 5 + 100 \times 4 + 100 \times 3 + 100 \times 2 + 100 \times 1$
= ரூ. $100\,(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$
= ரூ. 100×21
= ரூ. 2 100

இங்கு 21 ஆனது 6 மாதங்களில் செலுத்துவதற்கு எஞ்சியுள்ள கடன் பகுதிகளின் (ரூ.5000 பகுதிகளின்) மொத்தம் ஆகும். அது மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை எனப்படும். இதற்கேற்ப

மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை $= 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$

அப்பெறுமானங்களை ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் அடுத்துள்ள உறுப்புகளாகக் கருதும்போது அவற்றின் கூட்டுத்தொகையைச் சூத்திரம் $\frac{n}{2}(a + l)$ இன் மூலமும் கணிக்கலாம்.

அப்போது மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{6}{2}(6 + 1)$
$= 3 \times 7$
$= 21$

மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை = $\dfrac{\text{தவணைத்தொகைகளின் எண்ணிக்கை} \times (\text{தவணைத்தொகைகளின் எண்ணிக்கை} + 1)}{2}$

இன் மூலம் பெறலாம்.

இதற்கேற்பக் கடன் செலுத்தப்பட வேண்டிய மாதத் தவணைத்தொகைகளின் எண்ணிக்கை n எனின்,

மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{n}{2}(n + 1)$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

உடன் காசுக்கு ரூ.25000 ஆகவுள்ள ஒரு தொலைக்காட்சியொன்றைத் தொடக்கத்தில் ரூ.7000 ஐயும் மீதியை ஓர் ஆண்டில் சமனான மாதத் தவணைத்தொகைகளின் மூலமும் செலுத்திப் பெறலாம். கடனுக்காகக் குறைந்து செல்லும் மீதி முறையின் கீழ் 18% செலுத்தவேண்டிய ஆண்டு வட்டி அறவிடப்படுமெனின் ஒரு மாதத் தவணைத்தொகையைக் கணிக்க.

தொலைக்காட்சியின் பெறுமானம் = ரூ. 25 000
முதலில் செலுத்த வேண்டிய பணம் = ரூ. 7 000
∴ செலுத்துவதற்கு உள்ள கடன் = ரூ. 25 000 – 7 000
= ரூ.18 000
கடன் செலுத்தப்பட வேண்டிய காலம் = 12 மாதம்
∴ ஒரு மாதத்தில் செலுத்த வேண்டிய கடன் பகுதி = ரூ. 18 000 ÷ 12
= ரூ. 1 500
ஒரு மாத அலகிற்கு வட்டி = ரூ. $1500 \times \frac{18}{100} \times \frac{1}{12}$
= ரூ. 22.50

வட்டி செலுத்தப்பட வேண்டிய மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை = $\frac{12}{2}(12 + 1)$
= 6×13
= 78
∴ செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டி = ரூ. 22.50×78
= ரூ. 1 755
∴ செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் = ரூ. 18 000 + 1 755
= ரூ. 19 755
∴ ஒரு மாதத் தவணைத் தொகை = ரூ. 19 755 ÷ 12
= ரூ. 1 646.25

உதாரணம் 3

ஒரு கடையில் காணப்பட்ட அறிவித்தல் பலகையிலிருந்து பெயர்த்தெடுத்த ஒரு பகுதி கீழே காணப்படுகின்றது.

ரூ. 30 000 பெறுமானமுள்ள ஒரு சலவை இயந்திரத்தைத் தொடக்கத்தில் ரூ. 5 000 ஐயும் மீதியை ரூ. 2720 வீதம் 10 சமனான மாதத் தவணைத் தொகைகளாகவும் செலுத்திப் பெற்றுக்கொள்ளலாம்.

குறைந்து செல்லும் மீதி முறைக்குக் கடனுக்கான வட்டி கணிக்கப்படுமெனின், அறவிடப்படும் ஆண்டு வட்டி வீதத்தைக் கணிக்க.

சலவை இயந்திரத்தின் பெறுமானம் = ரூ. 30 000
முதலில் செலுத்த வேண்டிய பணம் = ரூ. 5 000
செலுத்துவதற்கு உள்ள மீதிப் பணம் = ரூ. 30 000 – 5 000
= ரூ. 25 000
மாதந்தோறும் செலுத்த வேண்டிய கடன் பகுதி = ரூ. 25 000 ÷ 10
= ரூ. 2 500

தவணைத்தொகைகளாகச் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் = ரூ. 2 720 × 10
= ரூ. 27 200
செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டி = ரூ. 27 200 – 25 000
= ரூ. 2 200

மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{10}{2}(10+1)$
$= 55$

ஒரு மாத அலகிற்கு வட்டி = ரூ. 2 200 ÷ 55
= ரூ. 40

அறவிடப்படும் ஆண்டு வட்டி வீதம் $= \frac{40}{2\ 500} \times 100\% \times 12$

$= 19.2\%$

பயிற்சி 9.1

1. ரேவதி 12% ஆண்டு வட்டியை அறவிடும் ஒரு வங்கியிலிருந்து ரூ.50 000 கடனைப் பெற்றாள். அக்கடனை 10 சமனான மாதத் தவணைத் தொகைகளில் செலுத்தி முடித்தல் வேண்டும்.
(i) ஒரு மாதத்தில் செலுத்தும் கடன் பகுதியைக் காண்க.
(ii) ஒரு கடன் பகுதிக்காக ஒரு மாதத்தில் செலுத்த வேண்டிய வட்டி யாது?
(iii) வட்டி செலுத்தப்பட வேண்டிய மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை யாது?
(iv) குறைந்து செல்லும் மீதி முறையின் கீழ் கடனுக்காகச் செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டியைக் காண்க.
(vii) ஒரு மாதத் தவணைத்தொகையின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. ஓர் அரசாங்க அலுவலர் தமது மாதச் சம்பளத்தின் பத்து மடங்கான பணத்தை 3% ஆண்டு வட்டி வீதத்தின் கீழ் கடனாகப் பெறத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை அக்கடனைச் சமனான மாதத் தவணைத்தொகைகளாக 5 ஆண்டுகளில் செலுத்தி முடித்தல் வேண்டும். அரச அலுவலரான சங்கரின் மாதச் சம்பளம் ரூ. 30 000 ஆகும்.

(i) சங்கர் பெறத்தக்க கடன் தொகை யாது?
(ii) கடனைச் செலுத்தத் தரப்பட்டுள்ள காலம் எத்தனை மாதங்கள்?
(iii) செலுத்த வேண்டிய ஒரு மாத அலகுக்கான வட்டியைக் கணிக்க.
(iv) கடனுக்காகச் செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டியைக் காண்க.
(v) ஒரு மாதத் தவணைத்தொகையின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. ரூ. 35 000 பெறுமானமுள்ள ஒரு சாப்பாட்டு மேசையை முதலில் ரூ. 5000 ஐயும் மீதியை 15 சமமான மாதத் தவணைத் தொகைகளாகவும் செலுத்திப் பெறலாம். கடனுக்காக 18% ஆண்டு வட்டி அறவிடப்படும் அதே வேளை வட்டி குறைந்து செல்லும் மீதி முறைக்குக் கணக்கிடப்படுகின்றது. செலுத்த வேண்டிய ஒரு கடன் தவணைத் தொகையின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. உடன்காசுக்கு ரூ. 150 000 ஆன ஒரு மோட்டார் சைக்கிளை முதலில் ரூ. 30 000 ஐயும் மீதியை 24% ஆண்டு வட்டியுடன் சமமான மாதத் தவணைத்தொகைகளில் 2 ஆண்டுகளில் செலுத்தி முடிக்கலாம். வட்டி குறைந்து செல்லும் மீதி முறைக்குக் கணக்கிடப்படுமெனின், செலுத்த வேண்டிய ஒரு கடன் தவணைத்தொகையின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. திரு. குமார் ரூ. 12 000 கடனை 6 மாதத் தவணைத்தொகைகளில் செலுத்தி முடிப்பதன் பேரில் பெற்றுள்ளார். ஒரு மாதத் தவணைத்தொகையின் பெறுமானம் ரூ. 2 500 ஆகும்.
(i) மாதந்தோறும் செலுத்த வேண்டிய கடன் பகுதியைக் காண்க.
(ii) தவணைத்தொகைகளாகச் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணத்தைக் காண்க
(iii) செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டியைக் காண்க.
(iv) மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
(v) ஒரு மாத அலகிற்கு வட்டியைக் காண்க.
(vi) ஆண்டு வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

6. உடன் காசுக்கு ரூ. 36 000 ஆன ஒரு குளிரேற்றியை முதலில் ரூ. 6000 ஐயும் மீதியை ரூ.1500 வீதம் 24 சம மாதத் தவணைத்தொகைகளிலும் செலுத்தி பெறலாம். வட்டி குறைந்து செல்லும் மீதி முறைக்குக் கணிக்கப்படுமெனின், அறவிடப்பட்டுள்ள ஆண்டு வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

7. ஒரு தையல் இயந்திரத்தை உடன்காசுக்கு ரூ. 23 000 இற்கு விற்கப்படுகின்றது. தவணைத்தொகைகளாகச் செலுத்தும் முறையில் முதலில் ரூ. 5 000 ஐயும் மீதியை ரூ. 2000 வீதம் 10 சமமான மாதத் தவணைத்தொகைகளிலும் செலுத்துவதன் பேரில் பெறலாம். கடனுக்கான வட்டி குறைந்து செல்லும் மீதி முறையில் கணிக்கப்படுமெனின், அறவிடப்படும் ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

9.2 கூட்டு வட்டி

கடனுக்கான அல்லது வைப்புப் பணத்துக்கான வட்டி கணிக்கப்படும் வேறொரு முறையாகக் கூட்டு வட்டி முறையை அறிமுகஞ்செய்யலாம். இம்முறையின் கீழ் வட்டி கணிக்கப்படும் விதத்தை ஓர் உதாரணத்தைக் கொண்டு ஆராய்வோம்.

10 % ஆண்டு வட்டியைச் செலுத்தும் ஒரு வங்கியில் 3 ஆண்டு காலத்திற்கு ரூ. 25 000 நிலையான வைப்பைப் பேணும் ஒருவருக்கு 3 ஆண்டுகளின் இறுதியில் வங்கியின் மூலம் வழங்கப்பட்ட கணக்கு அறிக்கை கீழே காணப்படுகின்றது.

திகதி	விவரம்	வைப்புச் செய்த பணம் ரூ.	வட்டி (ரூ.)
2013.01.01	பண வைப்பு	25 000.00	_
2013.12.31	வட்டி	_	2 500.00
2014.01.01	மீதி	27 500.00	_
2014.12.31	வட்டி	_	2 750.00
2015.01.01	மீதி	30 250.00	_
2015.12.31	வட்டி	_	3 025.00
2016.01.01	மீதி	33 275. 00	_

மேற்குறித்த அறிக்கைக்கேற்ப பண வைப்பாளருக்கு 2013 ஆம் ஆண்டுக்காக ரூ. 2 500 வட்டி கிடைத்துள்ளது. அவ்வட்டி ரூ. 25 000 ஆன வைப்புப் பணத்தில் 10% என்பது தெளிவாகும். அவ்வறிக்கைக்கேற்ப 2014.01.01 ஆந் திகதி கணக்கில் வைப்பில் இருந்த மொத்தப் பணமாக கருதப்படுவது. முதலில் வைப்புச் செய்த பணத்தினதும் 2013 ஆம் ஆண்டிற்காகக் கிடைத்த வட்டியினதும் மொத்தமாகிய ரூ. 27 500 ஆகும். மேலும் 2014 ஆம் ஆண்டிற்காகக் கிடைத்துள்ள வட்டி ரூ. 2 750 ஆக இருக்கும் அதே வேளை அது ரூ. 27 500 ஆன மொத்தப் பணத்தில் 10% என்பது தெளிவாகும். இவ்வாறு ஒவ்வோர் ஆண்டின் இறுதியிலும் கிடைக்கும் வட்டியை மொத்தப் பணத்துடன் சேர்த்துப் பெறப்படும் பெறுமானத்தை வைப்புச் செய்த பணமாகக் கருதி அடுத்த ஆண்டுக்கான வட்டி கணிக்கப்பட்டுள்ளது தெரிகின்றது.

இவ்வாறு ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் வட்டியைக் கணிக்கையில் தொடக்கப் பணத்திற்கு மாத்திரமல்ல ஆண்டுதோறும் பெறப்பட்டுள்ள வட்டிக்கும் வட்டி வழங்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே இம்முறையில் வட்டியைக் கணிக்கும் முறை **கூட்டுவட்டிமுறை** எனப்படும்.

வைப்புப் பணத்துக்கான வட்டியைக் கணிப்பது போன்று கடனைப் பெறும்போதும் கடனுக்கான வட்டியைக் கணித்தல் கூட்டு வட்டி முறைக்கு மேற்கொள்ளப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

10% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டிக்கு ரூ.10 000 ஐக் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் 2 ஆண்டுகளின் இறுதியில் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்காகச் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணத்தைக் காண்க.

கடனாகப் பெற்ற பணம் = ரூ. 10 000

ஆண்டுக் கூட்டு வட்டி வீதம் = 10%

முதல் ஆண்டுக்கான வட்டி = ரூ. $10\ 000 \times \frac{10}{100}$

= ரூ. 1 000

முதல் ஆண்டின் இறுதியில் மொத்தப் பணம் = ரூ. 10 000 + 1 000

= ரூ. 11 000

இரண்டாம் ஆண்டிற்கான வட்டி = ரூ. $11\ 000 \times \frac{10}{100}$

= ரூ. 1 100

இரண்டாம் ஆண்டின் இறுதியில் செலுத்தவேண்டிய மொத்தப் பணம் = ரூ. 11 000 + 1 100

= ரூ. 12 100

கூட்டு வட்டி முறைக்கு வட்டியை மேற்குறித்தவாறு ஒவ்வோர் ஆண்டுக்கும் வேறுவேறாகக் கண்டு கடனுடன் வட்டி கூட்டப்பட்டு மொத்தப் பணத்தைக் காணலாம்.

உதாரணம் 2

கமலன் ரூ.50 000 ஐ 6% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டி வீதத்தின் கீழ் மூன்று ஆண்டுகளுக்காக ஒரு நிலையான வைப்பாக ஒரு வங்கியில் முதலீடு செய்கின்றார். நிமலன் ரூ.50 000 ஐ 6% ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்தின் கீழ் ஒரு வங்கியில் வைப்புச் செய்கின்றார். மூன்று ஆண்டுகளின் இறுதியில் கமலனுக்கும் நிமலனுக்கும் உரிய மொத்தப் பணத்தைத் தனித்தனியாகக் காண்க.

முதலாம் ஆண்டின் இறுதியில் கமலனுக்குக் கிடைக்கும் மொத்தப் பணம் = ரூ. $50\ 000 \times \frac{106}{100}$

= ரூ. 53 000.00

இரண்டாம் ஆண்டின் இறுதியில் கமலனுக்குக் கிடைக்கும் மொத்தப் பணம் = ரூ. $53\ 000 \times \frac{106}{100}$

= ரூ. 56 180.00

மூன்றாம் ஆண்டின் இறுதியில் கமலனுக்குக் கிடைக்கும் மொத்தப் பணம் = ரூ. $56\ 180 \times \frac{106}{100}$

= ரூ. 59 550.80

3 ஆண்டுகளின் இறுதியில் நிமலனுக்குக் கிடைக்கும்
மொத்த வட்டி $= \text{ரூ. } 50\,000 \times \frac{6}{100} \times 3$
$= \text{ரூ. } 9\,000.00$

3 ஆண்டுகளின் இறுதியில் நிமலனுக்குக் கிடைக்கும்
மொத்தப் பணம் $= \text{ரூ. } 9\,000 + 50\,000$
$= \text{ரூ. } 59\,000.00$

கூட்டு வட்டி முறையில் மூன்று வருடங்களில் கிடைக்கும் தொகையைக் காண்பதற்குப் பின்வரும் முறையைப் பின்பற்றலாம்

$$\text{மொத்தப் பணம்} = \text{ரூ. } 50\,000 \times \frac{106}{100} \times \frac{106}{100} \times \frac{106}{100}$$
$$= \text{ரூ. } 59\,550.80$$

பயிற்சி 9.2

1. ஆண்டுக்கு 5% ஆன கூட்டு வட்டிக்கு ரூ. 5 000 கடனைப் பெற்ற ஒருவர் 2 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்குச் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் யாது?

2. ஆண்டுக்கு 7% ஆன கூட்டு வட்டிக்கு ரூ. 6 000 ஐ ஒரு வங்கியில் வைப்புச் செய்த ஒருவருக்கு 2 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் உரிய மொத்தப் பணத்தைக் காண்க.

3. ராதா 12% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டிக்கு ரூ. 8 000 ஐ வங்கியில் வைப்புச் செய்கின்றாள். ஓர் ஆண்டுக்குப் பின்னர் வங்கியில் வட்டி வீதம் 2% இனால் குறையுமெனின், 2 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் ராதாவுக்குக் கிடைக்கும் மொத்த வட்டியைக் கணிக்க.

4. ஹசனும் காசிமும் இரு நண்பர்கள். ஹசன் ரூ. 25 000 ஐ 15% ஆண்டு எளிய வட்டிக்கும் காசிம் ரூ. 25 000 ஐ 14% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டிக்கும் ஒரே நாளில் கடனுக்குக் கொடுத்திருப்பின் 3 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் எவருக்குக் கூடுதலான பணம் கிடைக்கும் எனக் கணிக்க.

5. 12% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டியைக் கொடுக்கும் ஒரு வங்கி ஒவ்வொரு 6 மாதங்களுக்கும் ஒரு தடவை வங்கியில் வைப்புச் செய்யும் பணத்திற்கான வட்டியைக் கணித்து அவ்வட்டியைத் பணத்துடன் கூட்டுகின்றது. ஓர் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் அவ்வங்கியில் ரூ. 40 000 ஐ வைப்புச்செய்த ஒருவருக்கு ஓர் ஆண்டின் இறுதியில் கிடைக்கும் மொத்தப் பணம் யாது?

6. 8% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டிக்கு ஒரு குறித்த பணத்தைக் கடனாகக் கொடுத்துள்ள ஒருவருக்கு இரண்டாம் ஆண்டின் இறுதியில் கிடைத்த வட்டி ரூ. 432 எனின், அவர் கடனாகக் கொடுத்துள்ள பணத்தைக் கணிக்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு தொலைக்காட்சியின் விற்பனை விலை ரூ. 45 000 ஆகும். ஒரே தடவையில் பணத்தைச் செலுத்தித் தொலைக்காட்சியைக் கொள்வனவு செய்யும் ஒருவருக்கு 6% கழிவு கிடைக்கும் அதே வேளை அதனைத் தவணைத் தொகைகளாகச் செலுத்துவதற்காகப் பெறும் ஒருவர் முதலில் ரூ. 9000 ஐயும் மீதியை சமனான 12 மாதத் தவணைத்தொகைகளாகவும் செலுத்தி முடிக்கலாம். கடனுக்காகக் குறைந்து செல்லும் மீதி முறைக்கு 24% ஆண்டு வட்டி அறவிடப்படுகின்றது.

(i) உடன் காசுக்குத் தொலைக்காட்சியைக் கொள்வனவு செய்யும்போது செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் யாது?

(ii) தவணையில் செலுத்தும் முறைக்குக் கொள்வனவு செய்யும்போது செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் யாது?

(iii) உடன் காசுக்குத் தொலைக்காட்சியைக் கொள்வனவு செய்யும்போது தவணை முறையில் பெறுவதிலும் பார்க்க எவ்வளவு அனுகூலம் கிடைக்கும்?

2. ஒருவர் 4.2% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டி வீதத்தின் கீழ் ரூ.100 000 ஐக் கடனாகப் பெற்று அப்பணத்தை 8% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டியைக் கொடுக்கும் ஒரு வங்கியில் வைப்புச் செய்கின்றார். 2 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர், வைப்புச் செய்த பணத்தைப் பெற்றுக்கொண்டு கடனைச் செலுத்துவாரெனின், அம்முதலீட்டில் அவர் பெற்ற இலாபத்தைக் கணிக்க.

3. ஒருவர் ஒரு குறித்த கூட்டு வட்டி வீதத்திற்கு ஒரு தொகையைக் கடனாகப் பெறுகின்றார். 2 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்கு ரூ. 14 400 ஐயும் 3 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்கு ரூ. 17 280 ஐயும் செலுத்த வேண்டுமெனின், கடனாகப் பெற்ற பணத்தையும் ஆண்டு வட்டி வீதத்தையும் காண்க.

10 பங்குச் சந்தை

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- பங்குச் சந்தையையும் அதன் இயல்பையும் இனங்காண்பதற்கும்
- பங்குச் சந்தையுடன் தொடர்புபட்ட விசேட பதங்களை இனங்காண்பதற்கும்
- கம்பனிகளில் முதலீட்டிலிருந்து கிடைக்கும் பங்கிலாபத்தைக் கணிப்பதற்கும்
- பங்குகளுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

அறிமுகம்

எமது நாட்டில் வணிக நடவடிக்கைகள் 2007 ஆண்டின் 7 ஆம் இலக்கக் கம்பனிச் சட்டத்தின் கீழ் பதிவுசெய்யப்பட்ட கம்பனிகளில் இடம்பெறுகின்றன. இக்கம்பனிகளின் உரிமை ஒரு தனியாளிடம் அல்லது பல தனியாட்களிடம் இருக்கலாம். கம்பனிகளின் அமைப்பிற்கேற்ப அவை

- வரையறுத்த தனியார் கம்பனிகள்
- வரையறுத்த பொதுக் கம்பனிகள்

என வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

வரையறுத்த பொதுக் கம்பனிகளுக்கு தமது வணிகங்களை ஆரம்பிப்பதற்கு அல்லது நடத்துவதற்குத் தேவையான நிதி வளத்தை திரட்டிக் கொள்வதற்கு பொது மக்களையும் இணைத்துக் கொள்ளலாம். இதற்கேற்ப இன்று வியாபார உலகில் உள்ள பிரசித்திபெற்ற முறை பகிரங்க ஊடக அறிவித்தலின் மூலம் பொதுமக்களிடம் கம்பனியின் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்யுமாறு வேண்டுதலாகும். பொதுமக்கள் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்த பின்னர் தமது பங்குகளை வேறொருவருக்கு விற்பனை செய்யலாம். அவ்வாறு பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்வதற்கும் விற்பனை செய்வதற்குமான வசதிகள் வழங்கப்பட்டுள்ள இடம் பங்குச் சந்தை எனப்படும்.

பங்குச் சந்தை (Share market)

''**கொழும்பு வியாபாரப் பொருள் பரிமாற்றம்**'' எனவும் இது அழைக்கப்படும். பங்குச் சந்தையானது இலங்கைப் பிணைகள் பரிவர்த்தனை ஆணைக்குழுவினால் கட்டுப்படுத்தப்படுகின்றது. இவ்வாணைக்குழு பங்குச் சந்தையின் பணிகளுக்கு வழிகாட்டல், நடத்தல், மேற்பார்வை ஆகிவற்றை மேற்கொள்கின்றது. பங்குக் கொடுக்கல்வாங்கல்களுக்காகப் பங்குச் சந்தைக்கு வரும் கம்பனிகள் பதிவுசெய்து

பட்டியற்படுத்தப்பட்ட கம்பனிகளாகக் கம்பனிப் பதிவேட்டில் சேர்க்கப்படுதல் வேண்டும். 2015 ஏப்பிரல் 21 ஆந் திகதி இவ்வாறு பட்டியற்படுத்தப்பட்ட கம்பனிகளின் எண்ணிக்கை 297 ஆகும். அக்கம்பனிகளின் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்யும்போது அல்லது விற்பனை செய்யும்போது வாடிக்கையாளர்களுக்கு உதவுவதற்காகத் தரகுக் கம்பனிகளும் பங்குச் சந்தையில் தொழிற்படுகின்றன.

பங்குச் சந்தைக் கொடுக்கல்வாங்கல்கள் இணையத்தினூடாக இற்றைப்படுத்தப்படும் அதேவேளை பொதுமக்களுக்கும் இணையத்தினூடாகக் கொடுக்கல்வாங்களைச் செய்வதற்கு வசதிகளும் செய்யப்பட்டுள்ளன.

10.1 பங்குகள்

பட்டியற்படுத்தப்பட்ட வரையறுத்த பொதுக் கம்பனிகள் தமது மூலதனத்தைத் திரட்டுவதற்குப் பொதுமக்களைப் பங்குகள் எனப்படும் அலகினூடாக தொடர்புபடுத்திக்கொள்கின்றன. கம்பனியின் தொடக்க மூலதனத்தை ஓர் அலகாகக் கருதி அதனைச் சமமாகப் பிரிக்கும்போது அதில் ஒரு பகுதி **பங்கு** எனப்படும்.

ஒரு குறித்த கம்பனி முதல் தடவையாகத் தனது தொடக்கப் பங்குகளைப் பொதுமக்களுக்கு வழங்கும்போது ஒரு பங்குக்கான விலை அக்கம்பனியினால் நிர்ணயிக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விலைக்கு ஒரு குறித்த முதலீட்டாளர் கம்பனியின் பங்குகளின் எவ்வெண்ணிக்கையையும் கொள்வனவு செய்யலாம். ஒரு குறித்த கம்பனியின் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்த முதலீட்டாளருக்கு அவர் பெற்ற பங்குகளின் எண்ணிக்கைக்கு விகிதசமமாக அக்கம்பனியின் உரிமை கிடைக்கும்.
இதனைப் பற்றி மேலும் விளங்கிக் கொள்வதற்குப் பின்வரும் உதாரணத்தைக் கருதுக.

ஒரு குறித்த கம்பனி பொதுமக்களுக்கு வழங்கிய 100 000 பங்குகளில் ஒரு முதலீட்டாளர் 10 000 பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்கின்றார். அப்போது முதலீட்டாளருக்குக் கம்பனியின் $\frac{10000}{100000}$ உரிமை கிடைக்கின்றது. அதனை ஒரு சதவீதமாகக் காட்டுவோம்.

$$\frac{10000}{100000} \times 100\% = 10\%$$

ஆகவே முதலீட்டாளர் கம்பனியிடமிருந்து 10% உரிமையைப் பெற்றுள்ளார்.

உதாரணம் 1

ஒரு கம்பனி C அதன் மூலதனமாகவுள்ள ரூ. 10 000 000 ஐ ஒரு பங்கு ரூ. 100 வீதமான 100 000 பங்குகளாகப் பிரித்துப் பொதுமக்களுக்கு வழங்குகின்றது. மோகன் அக்கம்பனியின் 5 000 பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்கின்றார்.

(i) மோகன் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்தமையால் கம்பனி C யில் அவர் பெற்ற உரிமையை

(a) ஒரு பின்னமாக

(b) ஒரு சதவீதமாகத் தருக.

(ii) மோகன் கம்பனி C யில் முதலீடு செய்த தொகையைக் காண்க.

(i) கம்பனி வழங்கிய பங்குகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 100\ 000$

மோகன் கொள்வனவு செய்த பங்குகளின் எண்ணிக்கை $= 5\ 000$

(a) மோகன் கம்பனியில் கொண்டுள்ள உரிமை பின்னமாக $= \dfrac{5\ 000}{100000} = \dfrac{1}{20}$

(b) சதவீதமாக $= \dfrac{1}{20} \times 100\%$

$= 5\%$

(ii) ஒரு பங்கின் விலை = ரூ. 100

மோகன் கொள்வனவு செய்த பங்குகளின் எண்ணிக்கை $= 5000$

முதலீடு செய்த தொகை = ரூ. 100×5000

= ரூ. 500 000

பங்குகளுக்கான பங்கிலாபம்

பட்டியற்படுத்தப்பட்ட கம்பனிகள் தமது தொடக்கப் பங்குகளை வழங்கும்போது கம்பனியின் இலாபத்தில் பங்குதாரர்களுக்காக வருமானமாக வழங்கும் தொகையின் அளவை அறிவிக்கின்றன. அது ஒரு பங்குக்குச் செலுத்தப்படும் தொகையின் மூலம் காட்டப்படுகின்றது. அவ்வாறு செலுத்தப்படும் தொகை ஆண்டுதோறும் அல்லது காலாண்டுகளுக்காகச் செலுத்தப்படும் அதே வேளை அது பங்கிலாபம் எனப்படும்.

ஓர் உதாரணமாக ஒரு கம்பனி அதன் பங்குதாரர்களுக்காக ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 5 ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தைச் செலுத்துகின்றது. இப்பங்கிலாபம் கம்பனியின் தீர்மானத்திற்கேற்ப அவ்வப்போது மாற்றியமைக்கப்படலாம். மேலும் விளங்கிக்கொள்வதற்கு மேற்குறித்த உதாரணத்தை மீண்டும் கருதுவோம்.

உதாரணம் 1

மோகன் கொள்வனவு செய்த ரூ. 100 பங்குகள் 5000 இற்குக் கம்பனி C ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 4 ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தைச் செலுத்துகின்றது.

(i) மோகன் பங்குகளை முதலீடுசெய்வதன் மூலம் பெறும் ஆண்டு வருமானத்தைக் காண்க.

(ii) மோகனிற்குக் கிடைக்கும் ஆண்டு வருமானத்தை முதலிட்ட தொகையின் சதவீதமாகக் காட்டுக.

(i) மோகனிடம் உள்ள பங்குகளின் எண்ணிக்கை = 5000
ஒரு பங்கிற்குரிய ஆண்டு வருமானம் = ரூ. 4
மோகன் பெறும் ஆண்டு வருமானம் = ரூ. 5000×4
= ரூ. 20 000

(ii) மோகன் முதலீடு செய்த தொகை = ரூ. 100×5000
= ரூ. 500 000

$\therefore$ அவருடைய ஆண்டு வருமானம் சதவீதமாக $= \dfrac{20000}{500000} \times 100\%$

$= 4\%$

இப்போது பங்கு முதலீட்டின் அடிப்படைச் சந்தர்ப்பத்திற்குரிய விடயங்கள் இடம்பெறும் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

பயிற்சி 10.1

1. ஒரு முதலீட்டாளர் நவீனம் ஆடைக் கம்பனியின் ஒரு பங்கு ரூ. 25 வீதம் 1000 பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்தார்.
(i) அவர் முதலீடுசெய்த தொகை யாது?
(ii) கம்பனி ஆண்டு பங்கிலாபமாக ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 4 ஐச் செலுத்தினால், முதலீட்டாளரின் ஆண்டு வருமானத்தைக் காண்க.

2. பின்வரும் அட்டவணைகளைப் பூரணப்படுத்துக.

(i)

ஒரு பங்கின் விலை ரூ.	பங்குகளின் எண்ணிக்கை	முதலீடுசெய்த தொகை ரூ.
10	2500	....
20	5000	....
....	500	50 000
....	4000	80 000
30	....	30 000
45	....	135 000

(ii)

பங்குகளின் எண்ணிக்கை	ஆண்டு பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு (ரூ.)	ஆண்டு பங்கிலாப வருமானம் (ரூ.)
500	2	....
1000	3.50	....
....	5	5000
....	2.50	500 000
2000	....	8000
750	....	2250

3. ஒரு வரையறுத்த பொதுக் கம்பனி அதன் மூலதனத்தைத் திரட்டுவதற்காக ஒரு பங்கு ரூ. 25 வீதமான 10 000 000 பங்குகளைப் பொதுமக்களுக்கு வழங்குகின்றது. அப்பங்குகளுக்கான ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 5 ஆகும். அக்கம்பனியில் முதலீட்டுக்காக முன்வரும் சங்கர் கம்பனியின் 50 000 பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்கின்றார்.

(i) கம்பனியின் மூலதனத்தைக் காண்க.

(ii) சங்கர், கம்பனியில் முதலீடு செய்த தொகையைக் காண்க.

(iii) பங்கு முதலீட்டிலிருந்து சங்கருக்கு ஆண்டுதோறும் கிடைக்கும் பங்கிலாபத்தைக் காண்க.

(iv) சங்கரின் ஆண்டு பங்கிலாபம் அவர் இட்ட தொகையின் என்ன சதவீதமாகும்?

4. ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தை ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 3 வீதம் செலுத்தும் கம்பனி ஒன்றில் ஒரு குறித்த எண்ணிக்கையான பங்குகளை ஒரு பங்கு ரூ. 20 வீதம் சந்தானம் கொள்வனவு செய்தார். அவர் அம்முதலீட்டிலிருந்து ஆண்டின் இறுதியில் ரூ. 12 000 பங்கிலாபத்தை வருமானமாகப் பெறுகின்றார்.

(i) கம்பனியில் சந்தானம் வைத்திருந்த பங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்வதற்குச் சந்தானம் முதலீடு செய்த தொகையைக் காண்க.

5. கணேசன் தன்னிடமிருந்த ரூ. 100 000 தொகையில் அரைவாசியை ஒரு குறித்த கம்பனியில் ஆண்டுதோறும் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 4 வீதம் செலுத்தப்படும் ரூ. 25 பங்குகளின் ஒரு குறித்த எண்ணிக்கையைக் கொள்வனவு செய்வதற்கும் மீதியை அரையாண்டிற்கு 12% வட்டியை வழங்கும் ஒரு நிதி நிறுவனத்தில் வைப்புச் செய்வதற்கும் தீர்மானித்தார். ஓர் ஆண்டின் பின்னர் கணேசனுக்கு எந்த முதலீடு அனுகூலமானது என்பதைக் காரணங் காட்டித் துணிக.

10.2 பங்குச் சந்தைக் கொடுக்கல்வாங்கல்கள்

பங்குச் சந்தையில் பட்டியற்படுத்தப்பட்ட கம்பனிகள் மாத்திரம் கொடுக்கல் வாங்கல்களுக்காகப் பிரவேசிப்பதற்கான சந்தர்ப்பம் கிடைக்கின்றது என்பதை நாம் அறிவோம். அத்தகைய ஒரு கம்பனி தொடக்கத்தில் பொதுமக்களுக்குப் பங்குகளை வழங்கிய பின்னர் நடைபெறும் பங்குக் கொடுக்கல் வாங்கல்கள் பற்றிக் கற்பதற்காகப் பின்வரும் குறிப்பில் கவனஞ் செலுத்துவோம்.

வரையறுத்த யுனைட்டட் கம்பனி ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 2 வீதம் ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தைச் செலுத்தும் 100000 பங்குகளை ஒரு பங்கு ரூ. 10 ஆன தொடக்க அறிமுக விலைக்குப் பொதுமக்களுக்கு வழங்கியது. ஓர் ஆண்டிற்குப் பின்னர் இக்கம்பனியின் ஒரு பங்கின் விலை பங்குச் சந்தையில் ரூ. 20 இற்கு உயர்ந்தது.அவ்வேளையில் நதீசா மேற்குறித்த கம்பனியின் 1000 பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்தார். சில ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் அக்கம்பனியின் ஒரு பங்கின் சந்தை விலை ரூ. 28 ஆக உயர்ந்தபோது அவர் தம்மிடமிருந்த 1000 பங்குகளையும் விற்றார்.

ஒரு குறித்த கம்பனியில் பங்கை அறிமுகஞ் செய்யும் தொடக்க விலையின் கீழ் முதலீட்டாளர்கள் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்யும் சந்தர்ப்பம் பங்குச் சந்தையில் **முதன்மைச் சந்தை** எனப்படும். முதன்மைச் சந்தையில் முதலீட்டாளர்கள் பங்குகளை கொள்வனவு செய்தலை மாத்திரம் செய்யலாம். எனினும் அதன் பின்னர் பங்குக் கொடுக்கல்வாங்கலுக்கு இடமளித்துக் கொண்டு பங்கிற்கான கேள்விக்கேற்ப பங்குகளுக்குப் புதிய விலை ஏற்படலாம். அவ்விலை அச்சந்தர்ப்பத்தில் **சந்தை விலை எனப்படும்**. இச்சந்தர்ப்பம் பங்குச் சந்தையில் **துணைச் சந்தை** எனப்படும். மேற்குறித்த யுனைட்டட் கம்பனியின் ஒரு பங்கின் விலை ரூ. 20 ஆக உயர்ந்து, மறுபடியும் சில ஆண்டுகளில் ரூ. 28 ஆக உயர்ந்தது. இவ்வாறு ஒரு பங்கின் சந்தை விலை குறைந்து கூடுதல் துணைச் சந்தையில் நடைபெறுகின்றது. அச்சந்தர்ப்பத்தில் முதலீட்டாளர்கள் தம்மிடமுள்ள பங்குகளை விற்பனை செய்யவோ, புதிய பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்யவோ முடியும்.

மூலதன இலாபம்

ஒரு கம்பனியின் பங்குகளை அதன் அறிமுகஞ் செய்யப்படும் விலைக்கு அல்லது சந்தை விலைக்குக் கொள்வனவு செய்யும்போது அவ்விலையானது ஒரு பங்கின் கொள்விலை எனவும் அப்பங்குகளைச் சந்தை விலைக்கு விற்கும்போது அவ்விலையானது ஒரு பங்கின் விற்பனை விலை எனவும் அழைக்கப்படும்.

ஒரு முதலீட்டாளர் பங்குகளை விற்கும்போது அல்லது கொள்வனவு செய்யும்போது இலாபம் அல்லது நட்டம் ஏற்படலாம். ஒருவர் தன்னிடமுள்ள பங்குகளை விற்கும்போது

விற்பனை விலை > கொள்வனவு விலை எனின் அப்போது மூலதன இலாபம் கிடைக்கின்ற அதே வேளை இது
மூலதன இலாபம் = பங்குகளின் விற்பனை விலை – பங்குகளின் கொள்விலை இனால் வரையறுக்கப்படும்.

அவ்வாறே,
விற்பனை விலை < கொள்விலை எனின், மூலதன நட்டம் ஏற்படுகின்ற அதேவேளை மூலதன நட்டமானது
மூலதன நட்டம் = பங்குகளின் கொள்விலை – பங்குகளின் விற்பனை விலை இனால் வரையறுக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

பங்குச் சந்தையுடன் தொடர்புபட்ட ஒரு முதலீட்டாளராகிய திரு. பெரேரா ஒரு குறித்த கம்பனியின் 2000 பங்குகளை ஒரு பங்கு ரூ. 20 வீதம் கொள்வனவு செய்தார். அக்கம்பனியின் ஒரு பங்கின் சந்தை விலை ரூ. 25 ஆக உயர்ந்தபோது அவர் தம்மிடமிருந்த கம்பனியின் எல்லாப் பங்குகளையும் விற்றார். திரு.பெரேரா

(i) கம்பனியில் முதலீடுசெய்த தொகையைக் காண்க.
(ii) பங்குகளை விற்பதன் மூலம் அவர் பெற்ற தொகையைக் காண்க.
(iii) பெற்ற மூலதன இலாபத்தைக் காண்க.
(iv) பெற்ற மூலதன இலாபத்தைக் கொள்விலையின் சதவீதமாகக் காட்டுக.

(i) கம்பனியில் முதலீடுசெய்த தொகை $= \text{ரூ. } 20 \times 2000$
$= \text{ரூ. } 40\ 000$

(ii) பங்குகளை விற்பதால் கிடைக்கும் தொகை $= \text{ரூ. } 25 \times 2000$
$= \text{ரூ. } 50\ 000$

(iii) மூலதன இலாபம் $= \text{ரூ. } 50000 - 40000$
$= \text{ரூ. } 10\ 000$

(iv) மூலதன இலாபம் கொள்விலையின் சதவீதமாக $= \dfrac{10000}{40000} \times 100\%$

$= 25\%$

மேலே (iv) இல் குறிப்பிட்ட மூலதன இலாபச் சதவீதத்தை ஒரு பங்கின் விலையின் சார்பிலும் பெறலாம்.
ஒரு பங்கின் கொள்விலை = ரூ. 20
ஒரு பங்கின் விற்பனை விலை = ரூ. 25

$\therefore$ மூலதன இலாபம் சதவீதமாக $= \dfrac{25-20}{20} \times 100\%$

$= \dfrac{5}{20} \times 100\%$

$= 25\%$

உதாரணம் 2

திரு. முகமது தம்மிடமிருந்த ரூ. 96 000 தொகையில் ஒரு குறித்த அளவை ஆண்டுப் பங்கிலாபமாக ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 2 வீதம் செலுத்தும் கம்பனி A யின் ஒரு குறித்த எண்ணிக்கையிலான பங்குகளை ஒரு பங்கு ரூ. 18 வீதம் கொள்வனவு செய்வதற்கு முதலிட்டார். மீதிப் பகுதியை ஆண்டுப் பங்கிலாபமாக ஒரு பங்கிற்கு 3.50 வீதம் செலுத்தும் கம்பனி B யின் குறித்த எண்ணிக்கையிலான பங்குகளை ஒரு பங்கு ரூ. 21 வீதம் கொள்வனவு செய்வதற்கு முதலிட்டார். ஓர் ஆண்டின் இறுதியில் கம்பனி A யின் ஆண்டுப் பங்கிலாபமாகக் கிடைத்த தொகையிலும் பார்க்க ரூ.1000 கூடுதலாகக் கம்பனி B யிடமிருந்து அவருக்குப் பங்கிலாபமாகக் கிடைத்தது. திரு முகமது

(i) கம்பனி A யில் முதலீடு செய்த தொகையை x எனக் கொண்டு x இடம்பெறும் ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்குக.
(ii) ஒவ்வொரு கம்பனியிலும் முதலீடுசெய்த தொகையை சமன்பாட்டைத் தீர்த்துக் காண்க.
(iii) இரு கம்பனிகளிலும் அவருக்கு இருந்த பங்குகளின் எண்ணிக்கைகளை வேறுவேறாகக் காண்க.
(iv) ஒவ்வொரு கம்பனியிலிருந்தும் கிடைத்த ஆண்டுப் பங்கிலாப வருமானத்தைக் காண்க.

ஆண்டு வருமானம் கிடைத்த பின்னர் திரு முகமது இரு கம்பனிகளிலும் அவருக்கு இருந்த எல்லாப் பங்குகளையும் அப்போது இரு கம்பனிகளிலும் பங்கின் சந்தை விலையாக இருந்த ரூ. 20 வீதம் விற்றார்.

(v) இரு கம்பனிகளிலும் இருக்கும் பங்குகளை விற்பதன் மூலம் கிடைத்த மொத்தத் தொகையைக் காண்க.
(vi) இரு கம்பனிகளிலும் செய்த முதலீட்டின் பயனாக ஆண்டின் இறுதியில் கிடைக்கும் பங்கிலாப வருமானத்தினதும் மூலதனப் இலாபத்தினதும் மொத்தமானது இடப்பட்ட தொகையில் 20% ஆகவேனும் இருத்தல் வேண்டும் என்னும் திரு முகமதுவின் எதிர்பார்ப்பு நிறைவேற்றப்படவில்லை எனக் காட்டுக.

(i) கம்பனி A யிலிருந்து பெற்ற பங்குகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{x}{18}$

(ii) கம்பனி A யில் ஆண்டுப் பங்கிலாப வருமானம் $=$ ரூ. $\dfrac{x}{18} \times 2 = \dfrac{x}{9}$

அவ்வாறே,

கம்பனி B யில் ஆணடுப் பங்கிலாப வருமானம் $=$ ரூ. $\dfrac{(96000 - x)}{21} \times 3.50$

$=$ ரூ. $\dfrac{(96000 - x)}{\cancel{21}_{3}} \times \dfrac{\cancel{7}^{1}}{2}$

$=$ ரூ. $\dfrac{(96000 - x)}{6}$

$\therefore \quad \frac{(96000-x)}{6} - \frac{x}{9} = 1000$ ஆனது தேவையான சமன்பாடாகும்.

(ii)

$$\frac{(96000-x)}{6} - \frac{x}{9} = 1000$$

$$18 \times \frac{(96000-x)}{6} - 18 \times \frac{x}{9} = 18 \times 1000$$

$$3\,(96\,000 - x) - 2x = 18\,000$$

$$288\,000 - 3x - 2x = 18\,000$$

$$288\,000 - 18\,000 = 5x$$

$$270\,000 = 5x$$

$$x = 54\,000$$

$\therefore$ கம்பனி A யில் முதலீடுசெய்த தொகை = ரூ. 54 000

கம்பனி B யில் முதலீடுசெய்த தொகை = ரூ. 96 000 – ரூ. 54 000
= ரூ. 42 000

(iii) கம்பனி A யில் இருந்த பங்குகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{54\,000}{18} = 3\,000$

கம்பனி B யில் இருந்த பங்குகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{42\,000}{21} = 2\,000$

(iv) கம்பனி A யில் செய்த முதலீட்டிலிருந்து கிடைத்த வருமானம் = ரூ. 3 000 × 2 = ரூ. 6 000

கம்பனி B யில் செய்த முதலீட்டிலிருந்து கிடைத்த வருமானம் = ரூ. 2 000 × 3.50 = ரூ. 7 000

(v) கம்பனி A யின் பங்குகளை விற்பதன் மூலம் கிடைத்த வருமானம் = ரூ. 3 000 × 20 = ரூ.60 000

கம்பனி B யின் பங்குகளை விற்பதன் மூலம் கிடைத்த வருமானம் = ரூ. 2 000 × 20 = ரூ. 40 000

$\therefore$ இரு கம்பனிகளிலும் உள்ள பங்குகளை விற்றுப் பெற்ற பங்கிலாப வருமானம் = ரூ. 60 000 + 40 000
= ரூ. 100 000

இரு கம்பனிகளிலிருந்தும் கிடைத்த ஆண்டு
பங்கிலாப வருமானம் = ரூ. 6 000 + 7 000
= ரூ. 13 000

∴ ஆண்டின் இறுதியில் உள்ள பங்கிலாப வருமானத்தினதும், விற்பதன் மூலம் பெற்ற தொகையினதும் மொத்தம். = ரூ. 100 000 + 13 000

= ரூ. 113 000

இரு கம்பனிகளினதும் பங்குகளில் முதலீடு
செய்த தொகை = ரூ. 96 000
கிடைத்த இலாபம் = ரூ. 113 000 – 96 000
= ரூ. 17 000

(vi) ∴ பணத்தை முதலீடு செய்வதன் மூலம் கிடைத்த இலாபம் முதலிட்ட தொகையின் சதவீதமாக $= \frac{17\,000}{96\,000} \times 100\%$

$= 17.7\%$

$17.7\% < 20\%$ ஆகையால் திரு முகமதுவின் எதிர்பார்ப்பு நிறைவேற்றப்படவில்லை.

இப்போது பங்குச் சந்தையில் முதலீடு பற்றி இதுவரைக்கும் கற்ற விடயங்கள் இடம்பெறும் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

பயிற்சி 10.2

1. அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

முதலீடு செய்யும் பணம் (ரூ.)	ஒரு பங்கின் சந்தை விலை (ரூ.)	கொள்வனவு செய்யும் பங்குகளின் எண்ணிக்கை	ஒரு பங்கிற்கு ஆண்டுதோறும் ரூ. 3 வீதம் பங்கிலாப வருமானம் (ரூ.)
50 000	25	....	....
20 000	40	....	1500
75 000	....	....	3 000
....	15	500	....
120 000	....	2 000	....

2. ஆண்டுதோறும் பங்கிலாபமாக ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 4 ஐச் செலுத்தும் கம்பனி ஒன்றில் சந்தை விலை ரூ. 30 ஆகவுள்ள பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்வதற்கு முரளி ரூ. 60 000 ஐ முதலிட்டார்.
(i) முரளி கொள்வனவு செய்த பங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
(ii) பங்கு முதலீட்டின் மூலம் முரளி பெறும் ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தைக் காண்க.
(iii) ஆண்டுப் பங்கிலாபம் முதலிடப்பட்ட பணத்தின் என்ன பின்னமாகும் எனக் காண்க.

3. ரமேஸ் ஒரு குறித்த கம்பனியில் ஒரு பங்கின் சந்தை விலை ரூ. 40 ஆக இருக்கும்போது 5 000 பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்தார். அப்பங்கு ஒன்றின் சந்தை விலை ரூ. 50 ஆகவுள்ளபோது அவரிடம் இருந்த கம்பனியின் பங்குகள் எல்லாம் விற்கப்பட்டன.

(i) பங்குகளை விற்கும்போது ரமேஸ் ஒரு பங்கிலிருந்து பெற்ற மூலதன இலாபத்தைக் காண்க.

(ii) எல்லாப் பங்குகளையும் விற்பதன் மூலம் கிடைக்கும் மூலதன இலாபத்தைக் காண்க.

(iii) மூலதன இலாபத்தை முதலிடப்பட்ட பணத்தின் ஒரு பின்னமாகக் காண்க.

4. ஒரு வியாபாரி சந்தை விலை ரூ. 40 ஆகவுள்ள ஒரு குறித்த கம்பனியின் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்வதற்கு ரூ. 40 000 ஐ முதலீடுசெய்த அதேவேளை ஓர் ஆண்டின் பின்னர் அவர் இட்ட பணத்தில் 10% ஐப் பங்கிலாபமாகப் பெற்றார். அவ்வருமானத்தைப் பெற்றபின்னர் ஒரு பங்கு ரூ. 50 வீதம் எல்லாப் பங்குகளும் விற்கப்பட்டன.

(i) வியாபாரி கம்பனியிலிருந்து பெற்ற ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தைக் காண்க.

(ii) கம்பனி ஒரு பங்கிற்காக ஆண்டுதோறும் செலுத்திய பங்கிலாபத்தைக் காண்க.

(iii) வியாபாரி பங்குகளை விற்பதன் மூலம் பெற்ற பணத்தைக் காண்க.

(iv) வியாபாரிக்குக் கிடைக்கும் மூலதன இலாபத்தைக் காண்க.

(v) வியாபாரியின் மூலதன இலாபத்தை முதலிடப்பட்ட பணத்தின் சதவீதமாகக் காட்டுக.

5. சந்தை விலை ரூ. 20 ஆகவுள்ள ஒரு கம்பனியில் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்த ஒருவர் பங்குகளின் சந்தை விலை அதிகரித்த சந்தர்ப்பத்தில் தன்னிடமிருந்த எல்லாப் பங்குகளையும் விற்றார். அதிலிருந்து அவருக்குக் கிடைத்த மூலதன இலாபம் முதலிடப்பட்ட பணத்தின் 80% ஆக இருந்தது.

(i) ஒரு பங்கிலிருந்து அவர் பெற்ற மூலதன இலாபம் யாது?

(ii) ஒரு பங்கு என்ன விலைக்கு விற்கப்பட்டது?

6. ஒரு பங்கின் சந்தை விலை ரூ. 24 ஆகவுள்ள ஒரு கம்பனியில் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்த ஒருவர் வருமானத்தைப் பெற்ற பின்னர் அப்பங்கு ஒன்றின் சந்தை விலை ரூ. 30 ஆகவுள்ள ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் பங்குகளை விற்பதன் மூலம் பெறும் மூலதன இலாபத்தை முதலிடப்பட்ட பணத்தின் சதவீதமாகக் காட்டுக.

7. ஒரு பங்கிற்கு ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ரூ. 6 ஐச் செலுத்தும் கம்பனி ஒன்றின் சந்தை விலை ரூ. 40 ஆகவுள்ள 1 000 பங்குகளை உடைய ஒரு முதலீட்டாளர் அப்பங்குகளை ஒரு வருட பங்கிலாப வருமானத்தைப் பெற்ற பின்னர் அவற்றின் சந்தை விலை அதிகரித்த ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் விற்றார். பங்குகளை விற்பதன் மூலமும் பங்கிலாப வருமானத்தின் மூலமும் அவர் பெற்ற முழு வருமானம் ரூ. 71 000 ஆக இருந்தது.

(i) பங்கு மூலதனத்திலிருந்து ஓர் ஆண்டிற்குக் கிடைத்த பங்கிலாப வருமானம் யாது?

(ii) அவர் ஒரு பங்கை என்ன விலைக்கு விற்றார்?
(iii) அவர் பெற்ற மூலதன இலாபத்தைக் காண்க.

8. ஆண்டு பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 4 வீதம் வழங்கும் சந்தை விலை ரூ. 20 ஆகவுமுள்ள பங்குகளையும் ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 5 வீதம் வழங்கும் சந்தை விலை ரூ. 25 ஆகவுள்ள பங்குகளையும் கொள்வனவு செய்வதற்குச் சேகர் சமனான அளவு பணத்தை முதலிட்டார். இவ்விரு முதலீடுகளிலும் கிடைத்த வருமானத்தை அவர் இட்ட பணத்தின் சதவீதமாகக் காட்டுக. (சாடை : ஒவ்வொரு பங்குகளையும் வாங்குவதற்கு முதலிட்ட பணத்தை x எனக் கொள்க).

9. ஒரு முதலீட்டாளர் தம்மிடமிருந்த ரூ. 70 000 பணத்தில் ஒரு பகுதியை ஆண்டு பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 3 செலுத்தும் ஒரு நிறுவனத்தில் சந்தை விலை ரூ. 30 ஆகவுள்ள ஒரு கம்பனியின் பங்குகளையும் மீதிப் பகுதியை ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ரூ. 4 செலுத்தும் ஒரு நிறுவனத்தில் சந்தை விலை ரூ. 20 ஆகவுள்ள ஒரு கம்பனியின் பங்குகளையும் கொள்வனவு செய்வதற்கு இட்டார். இம்முதலீட்டிலிருந்து அவர் ஓர் ஆண்டிற்குப் பெற்ற வருமானம் ரூ. 9 500 எனின், அவர் ஒவ்வொரு கம்பனியிலும் முதலீடு செய்த பணத்தை வேறுவேறாகக் காண்க.

10. ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 5 ஐச் செலுத்தும் ஒரு கம்பனியின் 4000 பங்குகளை உடைய ஒரு முதலீட்டாளர் அப்பங்குகளின் சந்தை விலை ரூ. 45 ஆகவுள்ள சந்தர்ப்பத்தில் அவற்றை விற்றார். பங்குகளை விற்பதன் மூலம் பெற்ற பணத்தை முழுமையாக இட்டு சந்தை விலை ரூ. 25 ஆகவுள்ள வேறொரு கம்பனியின் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்தார். அம்முதலீடு காரணமாக அவருடைய வருமானம் முதலில் கிடைத்த வருமானத்திலும் பார்க்க ரூ. 8800 இனால் அதிகரித்தது. இரண்டாவது கம்பனியில் ஒரு பங்கிற்காகச் செலுத்தப்படும் ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தைக் காண்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. குருபரன் தன்னிடமிருந்த ரூ. 50 000 பணத்தை நிலையான வைப்புக்காக ஓர் ஆண்டிற்கு 12% செலுத்தும் நிதி நிறுவனம் ஒன்றில் ஓர் ஆண்டிற்கு வைப்புச் செய்தார். ஆண்டின் இறுதியில் நிதி நிறுவனத்திலிருந்து அப்பணத்தை விடுவித்த அவர் ஆண்டிற்கு கிடைத்த வட்டியுடன் முழுப் பணத்தையும் ஓர் ஆண்டிற்கு ஒரு பங்கிற்கு ரூ.4 செலுத்தும் சந்தை விலை ரூ. 28 உள்ள ஒரு கம்பனியில் முதலீடு செய்தார்.
(i) நிதி நிறுவனத்தில் நிலையான வைப்புக்காக கிடைத்த வட்டியைக் காண்க.
(ii) பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்வதற்கு முதலீடு செய்த பணத்தைக் காண்க.
(iii) பங்கு முதலீட்டிலிருந்து கிடைத்த ஆண்டுப் பங்கிலாப வருமானத்தைக் காண்க.
(iv) இரண்டாம் ஆண்டிற்காக வட்டியுடன் முழுப் பணத்தையும் மறுபடியும் நிதி நிறுவனத்தில் வைப்புச் செய்வதா பங்குகளில் முதலீடு செய்வதா அனுகூலமானது என்பதைக் காரணங்களுடன் காட்டுக.

2. ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 2 ஆகவுள்ள 1500 சமனான பங்குகளைக் கொண்டுள்ள முதலீட்டாளர் அப்பங்குகளை ஓர் ஆண்டின் வருமானத்தைப் பெற்ற பின்னர் சந்தை விலை ரூ. 32 ஆகவுள்ள சந்தர்ப்பத்தில் விற்றார். பங்குகளை விற்பதன் மூலம் பெற்ற பணத்தை ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 2 வீதம் செலுத்தும் ஒரு கம்பனியில் சந்தை விலை ரூ. 40 இல் பங்குகளை வாங்குவதற்கு முதலீடு செய்தார். முதலாம், இரண்டாம் கம்பனிகளின் வருமானங்களுக்கிடையே உள்ள விகிதம் 5 : 4 எனக் காட்டுக.

3. உதயன் 12% எளிய வட்டிக்கு ரூ. 40 000 ஐ ஒரு நிதி நிறுவனத்திலிருந்து கடனாகப் பெற்றார். அவர் அப்பணத்தை முற்றாக ஆண்டுதோறும் ஒரு பங்கிற்குப் ரூ. 4.50 பங்கிலாபம் செலுத்தும் கம்பனி ஒன்றின் சந்தை விலை ரூ. 20 ஆகவுள்ள பங்குகளை வாங்குவதற்கு முதலீடு செய்தார். மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் அவர் தன்னிடமிருந்த எல்லாப் பங்குகளையும் அப்போதைய சந்தை விலையாகவிருந்த ரூ. 28 வீதம் விற்று நிதி நிறுவனத்திலிருந்து பெற்ற கடனை வட்டியுடன் முற்றாகச் செலுத்தி முடித்தார். இக்கொடுக்கல்வாங்கல் காரணமாக உதயனிற்கு ரூ. 28 600 இலாபம் கிடைத்தெனக் காட்டுக.

4. ஒரு குறித்த கம்பனி ஒரு பங்கிற்காக ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ரூ. 5 ஐச் செலுத்துகின்றது. அக்கம்பனியின் ஒரு பங்கின் சந்தை விலை ரூ. 48 ஆக இருக்கும்போது குமார் அக்கம்பனியின் பங்குகளில் பணத்தை முதலீடு செய்தார். சில ஆண்டுகள் வருமானத்தைப் பெற்ற பின்னர் அவர் தன்னிடமிருந்ந பங்குகளை 30% மூலதன இலாபம் கிடைக்குமாறு ஒரு பங்கின் சந்தை விலை உயர்ந்திருந்த ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் விற்பதற்கு உத்தேசித்தார். அவருடைய எதிர்பார்ப்பு வெற்றியீட்டுவதற்கு ஒரு பங்கை விற்க வேண்டிய விலை யாது?

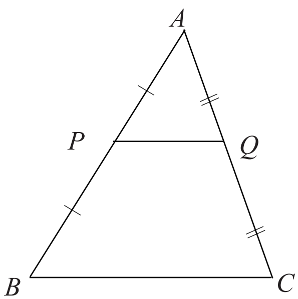
11 நடுப் புள்ளித் தேற்றம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தையும் அதன் மறுதலையையும் விளங்கிக் கொள்வதற்கும்
- நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தையும் அதன் மறுதலையையும் பயன்படுத்தி பல்வேறு கணிப்புக்களையும் ஏறிகளையும் செய்வதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

11.1 நடுப் புள்ளித் தேற்றம்



ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களுடன் தொடர்புபட்ட ஒரு பேறை நடுப் புள்ளித் தேற்றம் தருகின்றது. உருவில் காணப்படும் முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AB யின் நடுப் புள்ளியை P எனவும் பக்கம் AC யின் நடுப் புள்ளியை Q எனவும் கொள்ளப்பட்டுள்ளது. அப்போது

$AP = PB,\ AQ = QC$ ஆகும். அதனை

$AP = PB = \frac{1}{2}AB,\ AQ = QC = \frac{1}{2}AC$ எனவும் எழுதலாம்.

AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் கோட்டுத் துண்டமானது PQ வினால் காட்டப்படுன்றது.

தேற்றம் :
ஒரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் கோட்டுத் துண்டம் முக்கோணியின் மூன்றாவது பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாகவும் அதன் நீளத்தின் அரைவாசியாகவும் இருக்கும்.

மேற்குறித்த உருவில் தேற்றத்திற்கேற்ப

$$PQ \,//\, BC,$$
$$PQ = \frac{1}{2}BC$$ ஆகும்.

இத்தேற்றத்தை மெய்ப்பிப்பதற்காகப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 1

$AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 8$ cm ஆக இருக்குமாறு ஒரு முக்கோணி ABC யை வரைந்து AB, AC ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகளை முறையே P, Q எனப் பெயரிடுக.

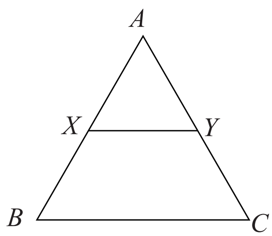
(i) PQ வின் நீளத்தை அளந்து, அது BC யின் நீளத்தில் அரைவாசி என்பதை உறுதிப்படுத்துக.

(ii) மூலைமட்டத்தைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு விதமாக PQ வும் BC யும் சமாந்தரமானவையா எனப் பார்க்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டிற்கேற்ப $PQ = \frac{1}{2}BC$ எனவும் $PQ // BC$ எனவும் காண்பீர்கள்.

நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணிகளுடன் தொடர்புபட்ட கணித்தல்கள் உட்பட்ட ஓர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

உதாரணம் 1



உருவில் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 12 cm ஆகவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC காணப்படுகின்றது. AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே X, Y ஆகும்.

i. XY இன் நீளம்

ii. நாற்பக்கல் $BCYX$ இன் சுற்றளவு

ஆகிவற்றைக் காண்க.

i. நடுப் புள்ளித் தேற்றத்திற்கேற்ப

$XY//BC$, $XY = \frac{1}{2}BC$ ஆகும்.

$$\therefore XY = \frac{1}{2} \times 12$$
$$= 6$$

$\therefore XY$ இன் நீளம் 6 cm ஆகும்.

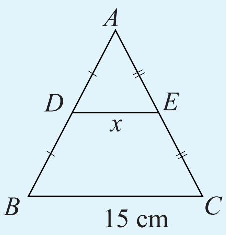
ii. நாற்பக்கல் $BCYX$ இன் சுற்றளவு $= BC + CY + XY + XB$

$$= 12 + 6 + 6 + 6$$
$$= 30$$

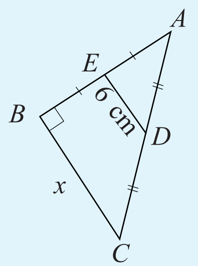
$\therefore$ நாற்பக்கல் $BCYX$ இன் சுற்றளவு 30 cm ஆகும்.

பயிற்சி 11.1

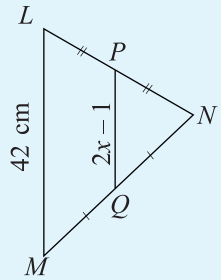
1. ஒவ்வோர் உருவிலும் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(i)

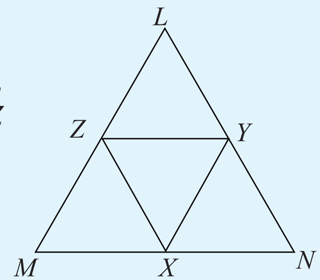


(ii)



(iii)

2. தரப்பட்டுள்ள உருவில் X, Y, Z ஆகியன MN, NL, LM ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளாகும். $MN = 8$ cm, $NL = 10$ cm, $LM = 12$ cm எனின், முக்கோணி XYZ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

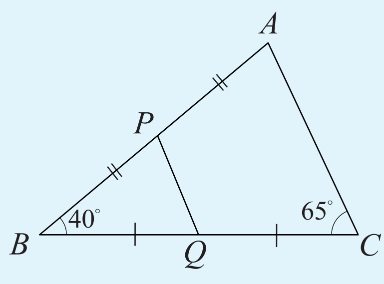


3. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் $AC = 15$ cm, $BD = 10$ cm ஆகும். AB, BC, CD, DA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் நாற்பக்கலின் சுற்றளவைக் காண்க.

4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து

(i) முக்கோணி ABC யில் $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, சுற்றளவு 24cm எனின், நாற்பக்கல் $PQCA$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

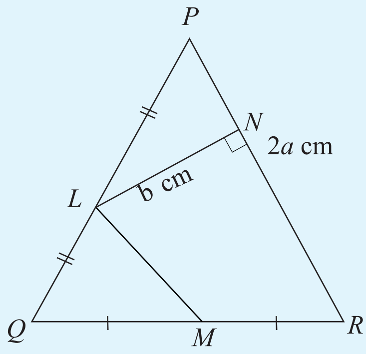
(ii) $\hat{B} = 40^\circ$, $\hat{C} = 65^\circ$ ஆயின் நாற்பக்கல் $PQCA$ யின் எஞ்சிய கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



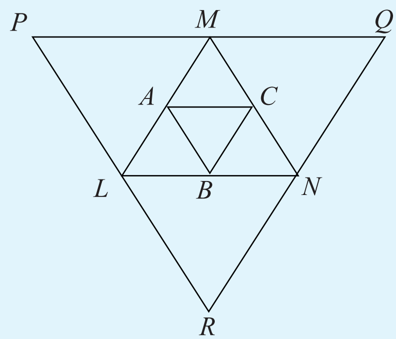
5. உருவில் உள்ள முக்கோணி PQR இல் QR, QP ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே M, L ஆகும். $QR + QP = 16$ cm, $PR = 2a$ cm, $LN = b$ cm, $L\hat{N}R = 90^\circ$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) நாற்பக்கல் $LMRP$ யின் சுற்றளவை a இன் சார்பில் காண்க.

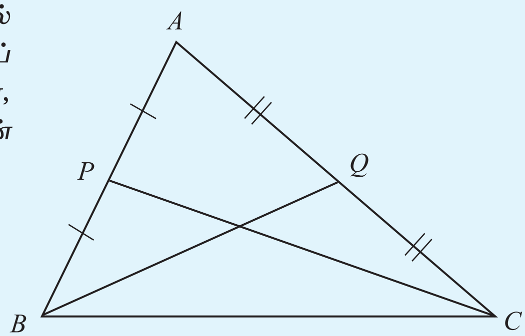
(ii) $LMRP$ இன் பரப்பளவை a, b ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.



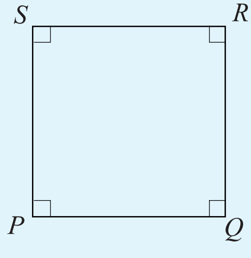
6. உருவில் உள்ள முக்கோணி PQR இன் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளாகிய M, N, L ஆகிவற்றைத் தொடுப்பதன் மூலம் முக்கோணி LMN உம் அதன் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளாகிய C, B, A ஆகியவற்றைத் தொடுப்பதன் மூலம் முக்கோணி CBA யும் பெறப்பட்டுள்ளன. முக்கோணி PQR இன் சுற்றளவு 12 cm எனின், முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவைக் காண்க.



7. உருவில் உள்ள முக்கோணி ABC யில் AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே P, Q எனின், PBC, BQC ஆகிய முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகள் சமனெனக் காட்டுக.

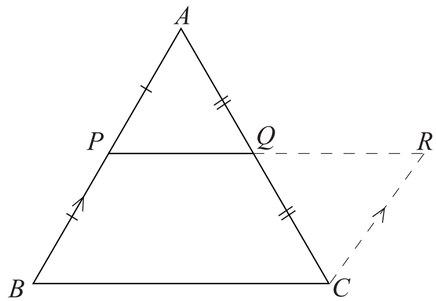


8. உருவில் சதுரம் $PQRS$ இன் சுற்றளவு 60 cm ஆகும். அதன் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் நாற்பக்கலின் சுற்றளவை சேடு வடிவில் தருக.



11.2 நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் நிறுவல்

நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தை முறைமையாக நிறுவும் முறை பற்றி இப்போது பார்ப்போம்.



தரவு: முக்கோணி ABC யில் AB , AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே P, Q ஆகும்.

நி. வே. : $PQ // BC$, $PQ = \frac{1}{2} BC$

அமைப்பு: BP யிற்குச் சமாந்தரமாக C யினூடாக வரைந்த கோடு நீட்டிய PQ ஐ R இல் சந்திக்கின்றது.

நிறுவல்:

APQ, QCR ஆகிய இரு முக்கோணிகளிலும்

$AQ = QC$ (AC இன் நடுப் புள்ளி Q ஆகையால்)

$A\hat{P}Q = Q\hat{R}C$ ($AP//RC$ ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் ஆகையால்)

$A\hat{Q}P = R\hat{Q}C$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$\therefore \Delta APQ \equiv \Delta QCR$ (கோ. கோ. ப.)

$\therefore AP = RC$, $PQ = QR$ (ஒருங்கிசை முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள்)

ஆனால் $AP = PB$

$\therefore PB = RC$

இதற்கேற்ப நாற்பக்கல் $BCRP$ இல் $PB = RC$, $PB//RC$

$\therefore$ $BCRP$ ஓர் இணைகரம் ஆகும். (ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கம் சமனும் சமாந்தரமும்)

$\therefore PR = BC$, $PR//BC$ ஆகும்.

ஆனால் $PQ = QR$ (ஒருங்கிசை முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள்)

$\therefore \quad PQ = \frac{1}{2} PR$

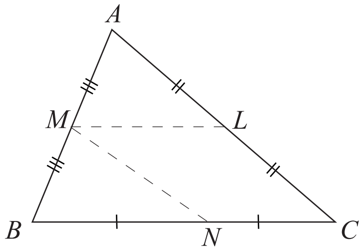
$= \frac{1}{2} BC$ ($PR = BC$ ஆகையால்)

$\therefore PQ//BC$, $PQ = \frac{1}{2} BC$ ஆகும்.

நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஏறிகளை நிறுவும் விதம் பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC யில் AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே M, N, L ஆகும். $NCLM$ ஓர் இணைகரமெனக் காட்டுக.



நடுப்புள்ளித் தேற்றத்திற்கேற்ப $ML = \frac{1}{2}BC$

$= NC$ (N ஆனது BC யின் நடுப்புள்ளியாகையால்)

$ML // BC$ ஆகும்

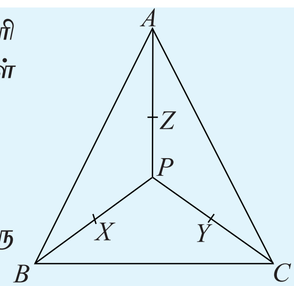
ஆகவே நாற்பக்கல் $NCLM$ இன் ஒரு எதிர்ப் பக்கச் சோடி சமனும் சமாந்தரமுமாகும். எனவே $NCLM$ ஆனது ஓர் இணைகரமாகும்.

பயிற்சி 11.2

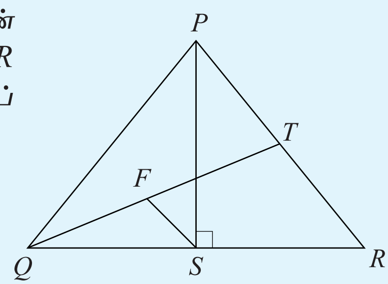
1. P ஆனது முக்கோணி ABC யினுள்ளே உள்ள ஒரு புள்ளி யாகும். AP, BP , CP ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே Z, X, Y ஆகும்.

(i) $B\hat{A}C = X\hat{Z}Y$, $A\hat{C}B = Z\hat{Y}X$, $C\hat{B}A = Y\hat{X}Z$ எனக் காட்டுக.

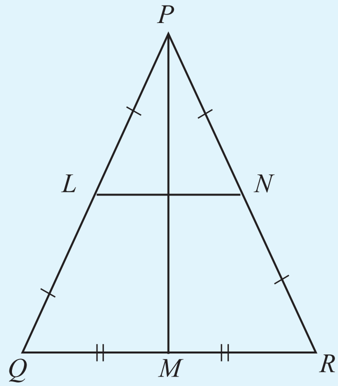
(ii) $\Delta\ ABC$ யின் சுற்றளவு $\Delta\ XYZ$ இன் சுற்றளவின் இரு மடங்கு எனக் காட்டுக.



2. உருவில் உள்ள முக்கோணி PQR இல் $Q\hat{P}R$ இன் இருகூறாக்கி பக்கம் QR ஐ S இல் $PS \perp QR$ ஆக இருக்குமாறு சந்திக்கின்றது. QT யின் நடுப் புள்ளி F ஆகும். $FS // TR$ எனக் காட்டுக.



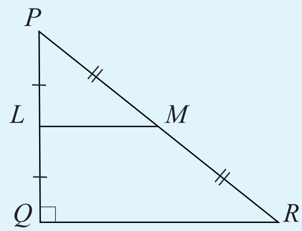
3. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $PM \perp LN$ எனக் காட்டுக.



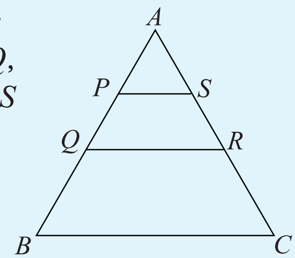
4. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

(i) $\Delta PLM \equiv \Delta QLM$ எனக் காட்டுக.

(ii) $LQRM$ இன் பரப்பளவு $= \frac{3}{4}\ \Delta\ PQR$ இன் பரப்பளவு எனக் காட்டுக.



5. தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC யில் AB , AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே Q , R ஆகும். AQ, AR ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே P , S ஆகும். $4\ PS = BC$ எனக் காட்டுக.



6. (i) எந்த ஒரு நாற்பக்கலின் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

(ii) எந்த ஒரு செவ்வகத்தின் நடுப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போதும் கிடைக்கும் நாற்பக்கல் ஒரு சாய்சதுரம் என நிறுவுக.

(iii) எந்த ஒரு சதுரத்தின் நடுப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போதும் கிடைக்கும் நாற்பக்கல் ஒரு சதுரம் என நிறுவுக.

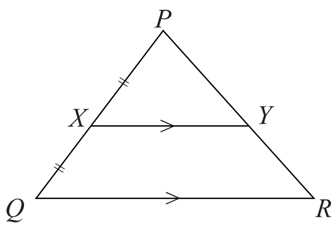
(iv) எந்த ஒரு சாய்சதுரத்தின் நடுப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போதும் கிடைக்கும் நாற்பக்கல் ஒரு செவ்வகமென என நிறுவுக.

11.3 நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலை

இப்போது நடுப்புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலை பற்றி ஆராய்வோம்.

தேற்றம்

ஒரு முக்கோணியின் ஒரு பக்கத்தின் நடுப் புள்ளியினூடாக மற்றுமொரு பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படும் கோட்டினால் மூன்றாம் பக்கம் இறுசமகூறிடப்படுகின்றது.



உருவில் உள்ள முக்கோணி PQR இல் X ஆனது PQ வின் நடுப் புள்ளி (அதாவது $PX = XQ$)ஆகும். $XY \mathbin{//} QR$ ஆகவும் இருப்பின், நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலைக்கேற்ப Y ஆனது PR இன் நடுப்புள்ளியாகும். அதாவது $PY = YR$ ஆகும்.

இத்தேற்றத்தை உறுதிப்படுத்துவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டைச் செய்வோம்.

செயற்பாடு 2

- $PQ = 5$ cm, $QR = 6$ cm , $RP = 7$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி PQR ஐ வரைக.
- பக்கம் PQ வின் நடுப்புள்ளியை X எனக் குறிக்க.
- X இனூடாக QR இற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு பக்கம் PR ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியை Y எனப் பெயரிடுக.
- PY, YR ஆகியவற்றின் நீளங்களை அளந்து PY, YR ஆகியவற்றின் நீளங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை எழுதுக.
- இவ்வாறு X இனூடாகப் பக்கம் PR இற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு கோட்டை வரைந்து அக்கோடு பக்கம் QR ஐ இடை வெட்டும் புள்ளியை Z எனப் பெயரிடுக. QZ , ZR ஆகியவற்றின் நீளங்களை அளக்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டிற்கேற்ப $PY = YR$ எனவும் $QZ = ZR$ எனவும் கண்டுள்ளீர்கள். அதாவது ஒரு முக்கோணியின் ஒரு பக்கத்தின் நடுப் புள்ளியினூடாக வேறொரு பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோட்டினால் மூன்றாவது பக்கம் இறுசமகூறிடப்படுகின்றது என்பதை நீங்கள் உறுதிப்படுத்துவீர்கள்.

இப்போது நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலையின் சில பிரயோகங்களை உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

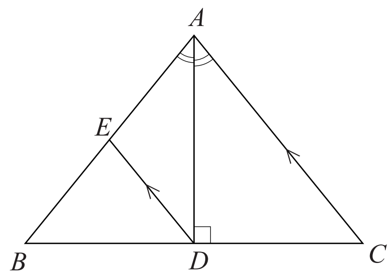
உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC யில் $B\hat{A}C$ யின் இருசமகூறாக்கி பக்கம் BC யை D யில் சந்திக்கின்றது. $A\hat{D}B = 90^\circ$ ஆகும். D யினூடாக CA யிற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு பக்கம் AB யை E யில் சந்திக்கின்றது.

(i) $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$ எனவும்

(ii) $BE = EA$ எனவும்

காட்டுக.



(i) ADB, ADC ஆகிய முக்கோணிகளில்

$B\hat{A}D = C\hat{A}D$ ($B\hat{A}C$ யின் இருசமகூறாக்கி AD என்பதால்)

பக்கம் AD ஆனது பொதுப் பக்கமாகும்.

$A\hat{D}B = A\hat{D}C$ ($AD \perp BC$)

$\therefore$ $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$ (கோ.கோ.ப.)

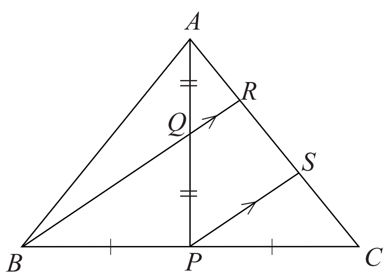
(ii) $BD = DC$ (ADB, ADC ஆகிய ஒருங்கிசை முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள்)

$BD = DC$, $AC \,//\, DE$ ஆகையால்

நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலைக்கேற்ப முக்கோணி BAC யில்

$BE = EA$

உதாரணம் 2



உருவில் உள்ள முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC யின் நடுப் புள்ளி P யும் கோடு AP யின் நடுப்புள்ளி Q வும் ஆகும். நீட்டிய கோடு BQ ஆனது பக்கம் AC யை R இற் சந்திக்கின்றது. BR இற்குச் சமாந்தரமாக P யினூடாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு AC யை S இற் சந்திக்கின்றது. $AC = 15$ cm எனின், AS இன் நீளத்தைக் காண்க.

முக்கோணி APS இல் $AQ = QP$, $QR//PS$ ஆகும்.
ஆகவே, நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலைக்கேற்ப

$AR = RS$ ——— ①

முக்கோணி BRC யில்

$BP = PC$, $BR//PS$ ஆகும்.

ஆகவே, நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலைக்கேற்ப

$RS = SC$ ——— ②

① , ② ஆகியவற்றுக்கேற்ப $AR = RS = SC$ ஆகும்.

$$\therefore\ AS = \frac{2}{3}AC$$

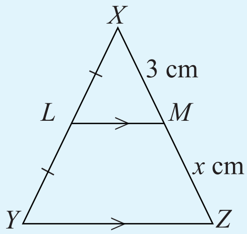
$$= \frac{2}{3} \times 15$$

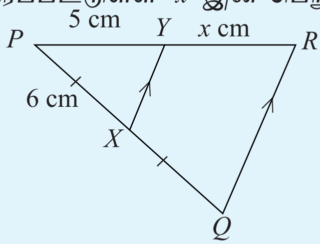
$$= 10$$

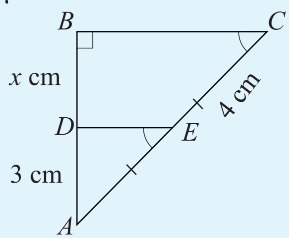
எனவே, AS இன் நீளம் 10 cm ஆகும்.

பயிற்சி 11.3

1. ஒவ்வோர் உருவிலும் தரப்பட்டுள்ள x இன் பெறுமனத்தைக் காண்க.





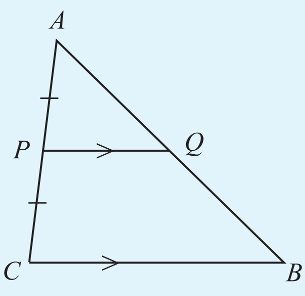


2. AC யின் நடுப் புள்ளி P ஆகவும் $BC = 12$ cm, $AB = 15$ cm, $PQ//CB$ ஆகவும் இருப்பின்,

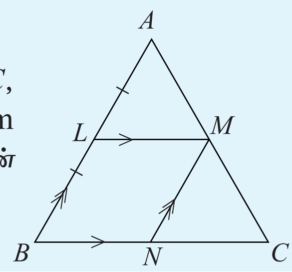
(i) QB இன் நீளம்

(ii) PQ இன் நீளம்

ஆகியவற்றைக் காண்க.



3. உருவில் உள்ள முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AB யின் நடுப்புள்ளி L ஆக இருக்கும் அதே வேளை $LM//BC$, $MN//AB$ ஆகும். $AB = 10$ cm , $AM = 7$ cm , $BC = 12$ cm எனின், MC யின் நீளத்தையும் நாற்பக்கல் $BNML$ இன் சுற்றளவையும் காண்க.

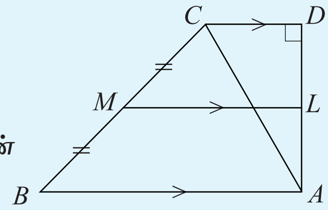


4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து $AC = 10$ cm, $AD = 8$ cm எனின்,

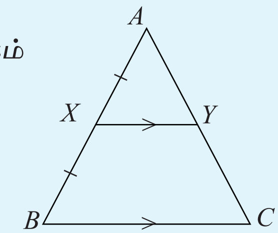
(i) DC யின் நீளம்

(ii) $ML = 10$ cm எனின் சரிவகம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு

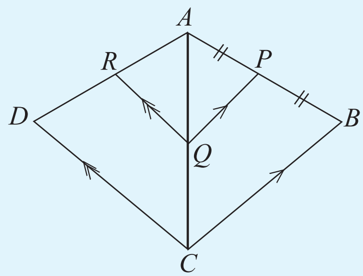
ஆகியவற்றைக் காண்க.



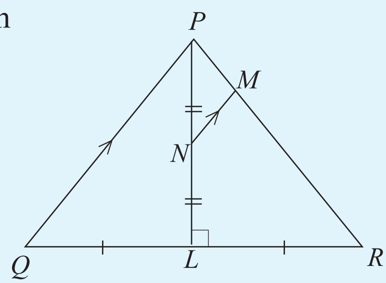
5. உருவில் உள்ள சமபக்க முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவு 30 cm ஆகும். தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து சரிவகம் $BCYX$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.



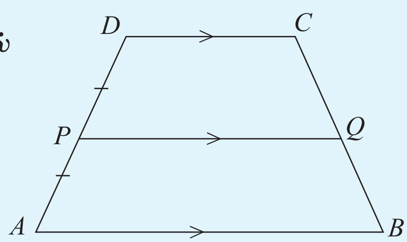
6. உருவில் உள்ள ΔABC, ΔADC சமபக்க முக்கோணிகள் ஆகும். $AB = 20$ cm உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $PQRDCB$ யின் சுற்றளவைக் காண்க.



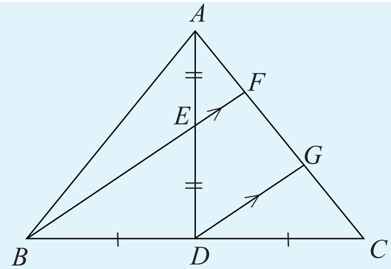
7. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $PQ = 20$ cm ஆயின் MN இன் நீளத்தைக் காண்க.



8. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப PQ வின் நீளத்தை AB, DC ஆகிய பக்கங்களின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.



9. உருவிலுள்ள சமபக்க முக்கோணி ABC யின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x cm எனவும், $EF = y$ cm எனவும் கொண்டு குறிக்கப்பட்டுள்ள தகல்களுக்கேற்ப.



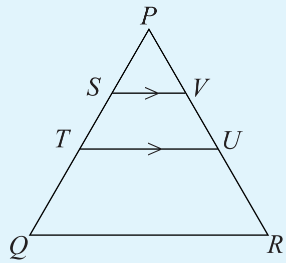
(i) நாற்பக்கல் $EDGF$ இன் சுற்றளவு

(ii) நாற்பக்கல் $BDGF$ இன் சுற்றளவு

(iii) நாற்பக்கல் $BDGA$ இன் சுற்றளவு

ஆகியவற்றை x, y ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

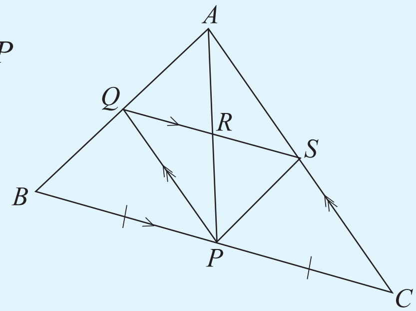
10. தரப்பட்டுள்ள உருவில் PQ வின் நடுப் புள்ளி T உம் PT யின் நடுப் புள்ளி S உம் ஆகும். S, T ஆகியவற்றினூடாக QR இற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோடுகள் பக்கம் PR ஐ முறையே V, U ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன.



(i) $PV = \frac{1}{4} PR$ எனக் காட்டுக.

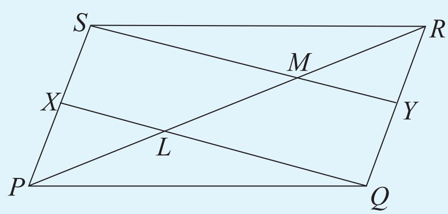
(ii) $SV : QR$ ஐக் காண்க.

11. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $AR = RP$ எனவும் $PS \,//\, BQ$ எனவும் காட்டுக.



பலவினப் பயிற்சி

1. இணைகரம் $PQRS$ இல் PS , QR ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே X, Y ஆகும். XQ , SY ஆகிய கோடுகள் மூலைவிட்டம் PR ஐ முறையே L, M ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன.

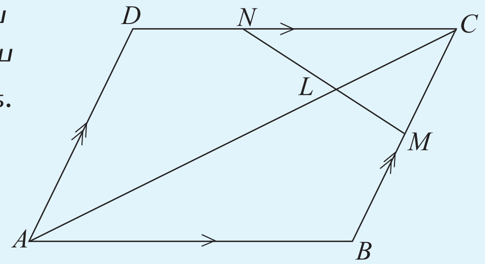


(i) $XQYS$ ஓர் இணைகரம் எனவும்

(ii) $PM = \frac{2}{3} PR$ எனவும்

நிறுவுக.

2. இணைகரம் $ABCD$ யில் BC, CD ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே M , N ஆகும். $LC=\frac{1}{4}AC$ எனக் காட்டுக.



3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

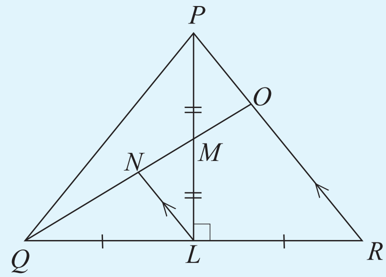
(i) $QN = NO$ எனவும்

(ii) $\Delta POM \equiv \Delta NLM$ எனவும்

(iii) $PNLO$ ஓர் இணைகரம் எனவும்

(iv) $MO = \frac{1}{4} QO$ எனவும்

காட்டுக.



4. $PQRS$ ஓர் இணைகரம். மூலைவிட்டங்கள் O வில் இடைவெட்டுகின்றன. பக்கம் PQ வின் நடுப்புள்ளி L ஆக இருக்கும் அதே வேளை கோடு LO வின் நடுப் புள்ளி T ஆகும். நீட்டிய கோடு PT யும் கோடு QR உம் Y இல் சந்திக்கின்றன.

(i) $PT = TY$ எனவும்

(ii) $PLYO$ ஓர் இணைகரம் எனவும்

(iii) $4\, LT = QR$ எனவும்

நிறுவுக.

5. முக்கோணி PQR இல் PQ, PR ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே Y , X ஆகும். QX, YR ஆகிய கோடுகள் L இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன. Q வினூடாக YR யிற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு நீட்டப்பட்ட PL ஐ M இல் சந்திக்கின்றது. LM, QR ஆகிய கோடுகள் N இல் சந்திக்கின்றன.

(i) $PL = LM$ எனக் காட்டுக.

(ii) $MR//QX$ எனக் காட்டுக.

(iii) $QMRL$ ஓர் இணைகரமெனக் காட்டுக.

(iv) $\frac{PL}{PN}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

12 வரைபுகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- ஒரு சோடி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை வரைபின் மூலம் பெற்றுக் கொள்ளவும்
- $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான இருபடிச் சார்புகளின் வரைபுகளை வரையவும்
- வரைபிலிருந்து சார்பின் நடத்தையை விளக்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

வரைபுகள் வரைவது தொடர்பாக கற்ற விடயங்களை மீண்டும் நினைவுகூர்வதற்கு பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

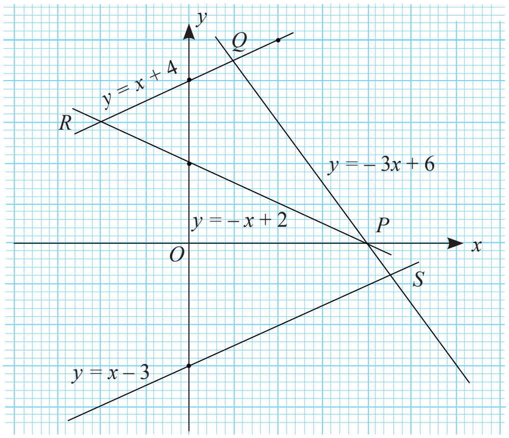
1. ***a.*** x இற்கான தெரிவுசெய்யப்பட்ட மூன்று பெறுமானங்களுக்கு ஒத்த y இன் பெறுமானங்களைக் கணித்து கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நேர்கோட்டையும் பொருத்தமான ஒரு ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைக.
(i) $y = x + 1$ (ii) $y - x = 5$ (iii) $2y = -x - 4$ (iv) $3x + 2y = 6$

b. மேலே வரைந்த ஒவ்வொரு நேர்கோடும் அச்சுகளைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நேர்கோட்டின் எதிரேயும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள ஆள்கூறுகளிலிருந்து நேர்கோட்டின் மீது அமைகின்ற ஆள்கூறுகளைத் தெரிந்து எழுதுக.

(i) $y = 2x - 3$; (1, 1), (0, 3), (2, 1) (ii) $y = 2x - 3$; (0, – 3), ($\frac{1}{2}$, 4), (1, 3)

3. ஓர் ஆள்கூற்றுத்தளத்தில் வரையப்பட்ட நான்கு நேர்கோடுகளின் பருமட்டான வரைபுகள் இங்கு தரப்பட்டுள்ளன. கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் P, Q, R, S என்னும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைத் தரப்பட்டுள்ள ஆள்கூறுகளிலிருந்து தெரிந்து எழுதுக. உமது விடைக்கான காரணங்களைத் தருக.



$(-3, 5), (-1, 3), (-1, -3)$

$(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}),\ (2, 0),\ (-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}),$

$(2\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$

12.1 வரைபின் மூலம் ஒரு சோடி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்பதற்குத் தெரியாக் கணியங்களின் பெறுமானத்தைக் காணும் அட்சரகணிதமுறை பயன்படுத்தப்பட்டது. ஆயினும் இங்கு அட்சரகணித முறையைப் பயன்படுத்தாது கீழே விவரிக்கப்படும் முறையில் ஒரு சோடி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை வரைபின் மூலம் வகைகுறித்துத் தீர்வுகளை பெற்றுக் கொள்ளும் முறையின் மீது கவனம் செலுத்தப்படுகின்றது.

இங்கு தரப்பட்டுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியை பற்றிக் கவனத்தைச் செலுத்துக.

$$y - x = -3$$
$$y + 3x = 5$$

முதலில் அட்சரகணித முறையில் ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியைத் தீர்ப்போம்.

$$y - x = -3 \text{ ——— } ①$$
$$y + 3x = 5 \text{ ——— } ②$$

② – ① இலிருந்து $(y + 3x) - (y - x) = 5 - (-3)$

$$y + 3x - y + x = 5 + 3$$
$$4x = 8$$
$$x = 2$$

$x = 2$ ஐ ① இல் பிரதியிடுவதால்

$$y - 2 = -3$$
$$\therefore \quad y = -3 + 2$$
$$y = -1$$

∴ தீர்வுகள்

$x = 2,\ y = -1$

இச்சோடி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைக் கருதும்போது $y = x - 3,\ y = -3x + 5$ என்னும் வடிவில் இரண்டு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளில் y ஐ எழுவாயாக்கி எழுதமுடியும்.

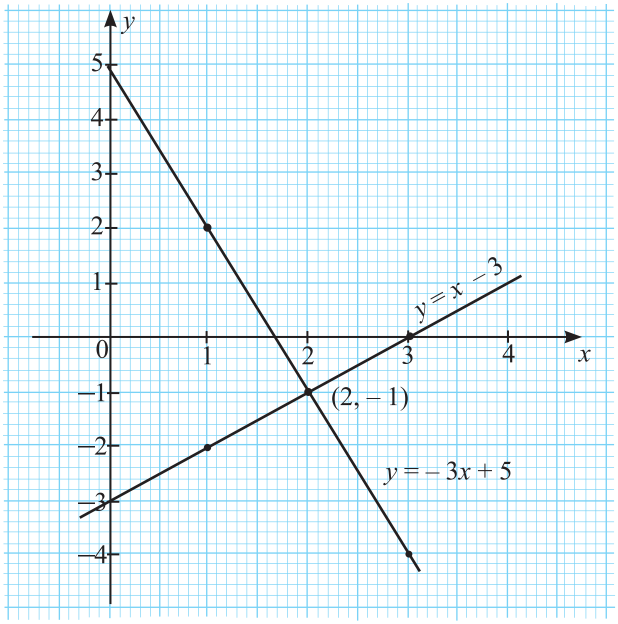
முதலில் இச்சமன்பாடுகளினால் தரப்படும் இரண்டு நேர்கோடுகளையும் ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைவோம். அதற்கெனத் தயாரிக்கப்பட்ட இரண்டு பெறுமான அட்டவணைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$y = x - 3$

x	1	2	3
y	-2	-1	0

$y = -3x + 5$

x	1	2	3
y	2	-1	-4



ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் மேற்குறித்த புள்ளிகளின் தொடையைக் குறித்த பின்னர் பெறப்படும் நேர்கோட்டுச் சோடியானது (2, − 1) என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன. இப்புள்ளியின் x, y பெறுமானங்களை மேற்குறித்த சமன்பாட்டுச் சோடியில் பிரதியிடும்போது சமன்பாட்டுச் சோடியின் இரு பக்கமும் சமனாவதை அவதானிக்க முடிகின்றது. அதாவது இவ்வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை $x = 2$, $y = -1$ என்னும் பெறுமானங்கள் மேற்குறித்த ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியின் தீர்வுகள் என்பது தெளிவாகின்றது. மேற்படி தீர்வுகள் சமன்பாட்டுச் சோடியை அட்சரகணித முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்ப்பதால் பெறப்பட்ட விடையுடன் சமனாவதால் சமன்பாட்டுச் சோடியின் கேத்திரகணிதத் தீர்வு மேலும் உறுதிப்படுத்தப்படுகின்றது என்பது தெளிவாகும்.

இதற்கேற்ப இரண்டு ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் கேத்திரகணிதரீதியில் காண்பதற்காக நாம் செய்யவேண்டியது அச்சமன்பாடுகளின் நேர்கோட்டுச் சோடியை ஓர் ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைந்து அவற்றின் இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்பதாகும். அப்போது x − ஆள்கூற்றின் மூலம் x இன் பெறுமானமும் y − ஆள்கூற்றின் மூலம் y இன் பெறுமானமும் தீர்வுகளாகப் பெறப்படும்.

கீழேயுள்ள உதாரணத்தில் ஓர் ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியை உருவாக்கி அவற்றை கேத்திரகணிதரீதியில் தீர்க்கும் முறை பற்றி ஆராயப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

ஒருவர் தபாற் கந்தோரில் ரூ. 10, ரூ. 20 ஆகிய பெறுமதிகளைக் கொண்ட 10 முத்திரைகளை வாங்கினார். வாங்கிய முத்திரைகளின் மொத்தப் பெறுமதி ரூ. 120 ஆகும்.

(i) வாங்கிய ரூ. 10 முத்திரைகளின் எண்ணிக்கையை x எனவும் ரூ.20 முத்திரைகளின் எண்ணிக்கையை y எனவும் கொண்டு ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியொன்றை உருவாக்குக.

(ii) மேற்படி சமன்பாடுகளை வரைபுகளைக் கொண்டு தீர்த்து வாங்கிய ரூ. 10, ரூ. 20 பெறுமதியான முத்திரைகளின் எண்ணிக்கைகளை தனித்தனியே காண்க.

உரிய ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியைப் பின்வரும் முறையில் உருவாக்கிக் கொள்ளலாம்.

$$x + y = 10 \quad \text{——— ①}$$

$$10x + 20y = 120 \quad \text{——— ②}$$

மேற்குறித்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் வரைபில் காட்டுவோம்.

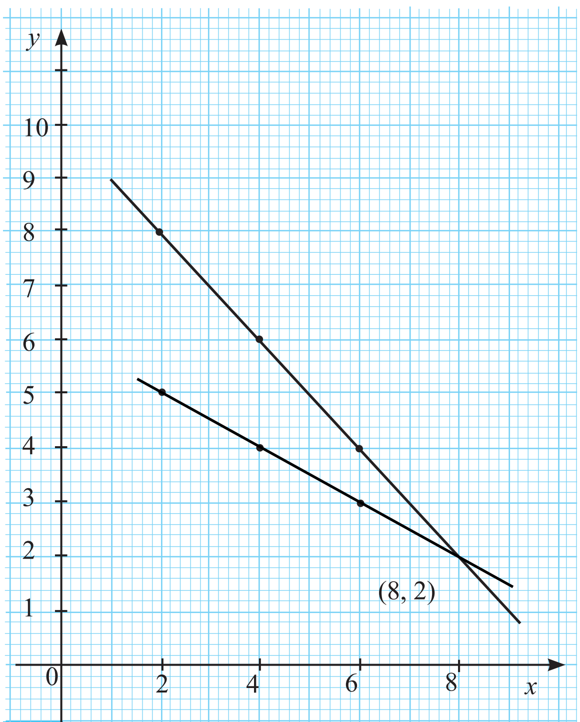
$x + y = 10$ ஆகவும், $y = -x + 10$

x	2	4	6
y	8	6	4

$10x + 20y = 120$ ஆகவும், $y = -\frac{1}{2}x + 6$

x	2	4	6
y	5	4	3

இப்போது கீழே காட்டப்பட்டுள்ளவாறு கோட்டுச் சோடி ஒன்று பெறப்படும்.



$x + y = 10$, $10x + 20y = 120$ என்பவற்றின் மூலம் குறிப்பிடப்படும் சமன்பாட்டுச் சோடியை வரைபு படுத்தும்போது அவை (8, 2) என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன. அப்போது உரிய சமன்பாட்டுச் சோடியின் தீர்வுகள் $x = 8$, $y = 2$ ஆகும். அதாவது அவர் வாங்கிய ரூ. 10 பெறுமதியான முத்திரைகளின் எண்ணிக்கை 8 உம் ரூ. 20 பெறுமதியான முத்திரைகளின் எண்ணிக்கை 2 உம் ஆகும்.

பயிற்சி 12.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாட்டு சோடியையும் வரைபுபடுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க. அட்சரகணித முறையைப் பயன்படுத்தி அச்சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து விடைகளை உறுதிப்படுத்துக.

a. $y - x = 4$
$y - 2x = 3$

b. $y = -2x - 2$
$-2y = -x - 6$

c. $3x - 4y = 7$
$5x + 2y = 3$

2. குறித்த ஒரு பாடசாலையில் தரம் 11 இல் A, B என இரண்டு வகுப்புகள் உள்ளன. வகுப்பு A இலிருந்து ஐந்து பிள்ளைகள் வகுப்பு B இற்குச் சென்றதால் வகுப்பு A இலுள்ள மாணவர் தொகையின் இரு மடங்கினர் வகுப்பு B யில் இருப்பர். வகுப்பு B யிலிருந்து 5 பிள்ளைகள் வகுப்பு A இற்குச் சென்றால் இரண்டு வகுப்புக்களிலும் சம எண்ணிக்கையிலான மாணவர்கள் இருப்பர்.

(i) வகுப்பு A யிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை x எனவும் வகுப்பு B யிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை y எனவும் கொண்டு ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடி ஒன்றை உருவாக்குக.

(ii) மேற்குறித்த சமன்பாட்டுச் சோடியை ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைபுபடுத்தி அதிலிருந்து இரண்டு வகுப்புக்களிலும் இருந்த பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கைகளை வெவ்வேறாகக் காண்க.

இருபடிச் சார்புகளின் வரைபுகள்

$y = ax^2$, $y = ax^2 + b$ ஆகிய வடிவங்களிலான இருபடி சார்புகளின் வரைபுகள் தொடர்பாகக் கற்ற விடயங்களை மீண்டும் நினைவுகூர்வதற்கு கீழே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. $y=x^2-5$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்காகப் பெறப்பட்ட x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை உள்ளடக்கிய பூரணமற்ற பெறுமான அட்டவணையொன்று கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	___	-4	-5	___	-1	4

a. (i) மேலேயுள்ள அட்டவணையில் கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

(ii) பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைப் பயன்படுத்தி மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.

b. வரைந்த வரைபைப் பயன்படுத்தி

(i) சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம்

(ii) வரைபின் இழிவுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

(iii) சார்பின் பெறுமானம் மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(iv) சார்பு நேராக அதிகரிக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(v) $y = -1$ ஆகும்போது x இன் பெறுமானங்கள்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. (i) $y = -2x^2 + 4$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள பூரணமற்ற பெறுமான அட்டவணையில் கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-14	___	2	4	2	-4	-14

(ii) பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைப் பயன்படுத்தி மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.

வரைந்த வரைபைப் பயன்படுத்தி

(iii) சார்பின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

(iv) சார்பின் பெறுமானம் பூச்சியமாகும் x இன் பெறுமானங்களைப் பெறுக.

(v) சார்பு மறையாகக் குறைந்து செல்லும் x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.

(vi) $y \leq 2$ ஆகும் x இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.

(vii) $\sqrt{2}$ இன் பெறுமானத்தை முதலாம் தசமதானத்திற்குக் காண்க.

3. ஒவ்வொரு சார்பின் மூலமும் தரப்படும் வரைபுகளை வரையாது பின்வரும் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

சார்பு	திரும்பற் புள்ளியின் தன்மை (உயர்வு/இழிவு)	சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு	உயர்வு/ இழிவு பெறுமானம்	திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
(i) $y = 2x^2$	....	....	....	....
(ii) $y = \frac{1}{2}x^2$	....	....	....	....
(iii) $y = x^2 + 3$	....	....	....	....
(iv) $y = 1 - 2x^2$	உயர்வு	$x = 0$	1	(0, 1)
(v) $y = -3x^2 - 4$	....	....	....	....
(vi) $y = \frac{3}{2}x^2 - 2$	....	....	....	....

12.2 $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான ஒரு சார்பின் வரைபு

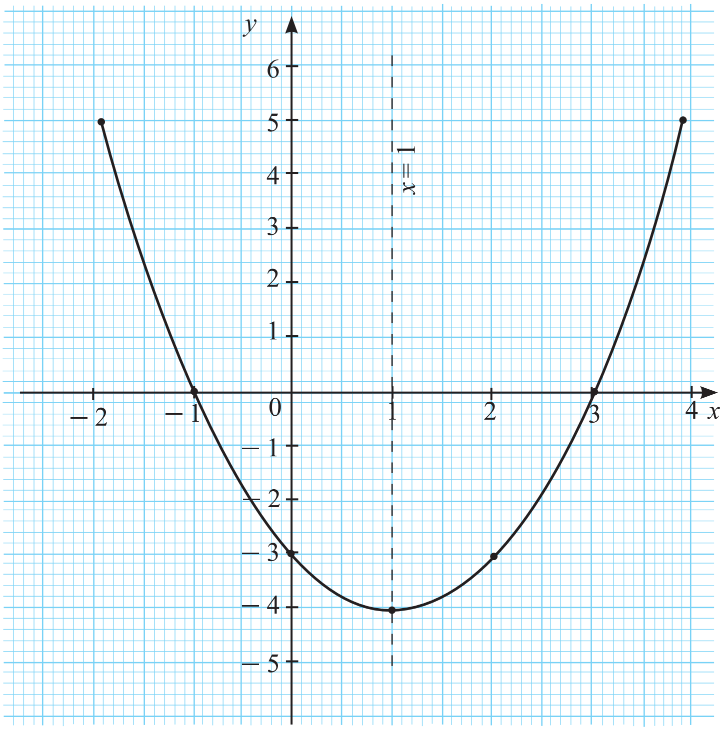
$y = ax^2 + b$ என்னும் வடிலான ஓர் இருபடிச் சார்பின் வரைபு தொடர்பாகக் கற்ற பண்புகளின் அறிவைப் பயன்படுத்தி $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான ஓர் இருபடிச் சார்பின் வரைபு தொடர்பான பண்புகளைக் கற்பதற்காக மேலதிக கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

$a > 0$ ஆகும்போது $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான வரைபை வரைதலும் அதன் பண்புகளை அறிந்து கொள்ளுதலும்

சில அடிப்படை பண்புகளை அறிந்துகொள்வதற்காக முதலில் $y = x^2 - 2x - 3$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவோம். அதற்காக $-2 \leq x \leq 4$ என்னும் வீச்சில் y இன் பெறுமானங்களைப் பெற்றுக்கொள்வதற்காக பின்வருமாறு ஒரு பெறுமான அட்டவணையைத் தயாரிப்போம்.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5
(x, y)	$(-2, 5)$	$(-1, 0)$	$(0, -3)$	$(1, -4)$	$(2, -3)$	$(3, 0)$	$(4, 5)$

மேற்குறித்த வரைபை வரைவதற்கு முன்னர் x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களின் வீச்சுப் பற்றிய விளக்கத்தைப் பெற்றுக்கொண்டு அதற்கேற்ப x அச்சு வழியே 10 சிறிய கட்டங்களினால் ஓர் அலகும் y அச்சு வழியே 10 சிறிய கட்டங்களினால் இரண்டு அலகுகளும் குறிக்கப்படும் வகையில் அளவிடையை எடுத்து ஆள்கூற்றுத் தளத்தை வரைந்து $y = x^2 - 2x - 3$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவது இலகுவானதாகும்.



$y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான ஒரு சார்பின் வரைபை பரவளையி என்போம். வரையப்பட்ட வரைபிலிருந்து பின்வரும் பண்புகளை அவதானிக்க முடியும்.

- வரைபானது ஒரு பரவளைவாக இருப்பதுடன் அது கோடு $x = 1$ பற்றிச் சமச்சீரானது. அதற்கேற்ப வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 1$ ஆகும்.

வரைபில் x இன் பெறுமானம் -2 இலிருந்து முறையே அதிகரிக்கும்போது அதற்கு ஒத்த y யின் பெறுமானம் முறையே குறைந்து இழிவுப் பெறுமானமாகிய -4 ஐ எடுத்து மீண்டும் அதிகரிக்கின்றது.

மேற்குறித்த வரைபில் x இன் பெறுமான வீச்சினுள் y யின் நடத்தையை மேலும் விபரமாக விளங்கிக் கொள்வோம்.

- x இன் பெறுமானம் -1 வரை அதிகரிக்கும்போது y இன் பெறுமானம் அல்லது சார்பின் பெறுமானம் 0 (பூச்சியம்) வரை நேராகக் குறைகின்றது. இங்கு "நேராகக் குறைகின்றது" என்பதன் கருத்து சார்பின் பெறுமானமானது நேர் பெறுமானமாகவே குறைகின்றது என்பதாகும்.
- x இன் பெறுமானம் -1 ஆகும்போது சார்பின் பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.
- x இன் பெறுமானம் -1 இலிருந்து 1 வரை அதிகரிக்கும்போது அதற்கு ஒத்ததாக y இன் பெறுமானம் 0 இலிருந்து -4 வரை மறையாகக் குறைகின்றது.
- x இன் பெறுமானம் 1 இலிருந்து 3 வரை அதிகரிக்கும்போது அதற்கு ஒத்ததாக y இன் பெறுமானம் -4 இலிருந்து 0 வரை மறையாக அதிகரிக்கின்றது.
- x இன் பெறுமானம் 3 ஆகும்போது y இன் பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.
- x இன் பெறுமானம் 3 இலிருந்து அதிகரிக்கும்போது y இன் பெறுமானம் 0 இலிருந்து நேராக அதிகரிக்கின்றது.

மேலேயுள்ள பண்புகளைக் கவனத்தில் கொள்வதன் மூலம்,

- சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சை சமனிலியாக $-1 < x < 3$ என்னும் வடிவில் எழுதலாம்.
- x இன் பெறுமானம் -1 இலும் குறைவாக அல்லது x இன் பெறுமானம் 3 இலும் அதிகரிக்கும்போது y இன் பெறுமானம் நேராகும். அதாவது சார்பு நேராகும் x இன் பெறுமான வீச்சு $x < -1$, $x > 3$ ஆகும்.

இதற்கு மேலதிகமாக பின்வரும் விடயங்கள் பற்றியும் கவனம் செலுத்துக.

- இங்கு வரைந்த வரைபுக்கும் தரப்பட்டுள்ள $y = x^2 - 2x - 3$ என்னும் சார்புக்கும் இடையிலுள்ள தொடர்பை விளங்கிக் கொள்வது மிக முக்கியமானதாகும். அதனை இவ்வாறு விபரிக்கலாம்.

1. வரைபின் மீது எந்தவொரு புள்ளியை (a, b) எடுப்பினும் அது $y = x^2 - 2x - 3$ என்னும் சார்பை $x = a,\ y = b$ என்பவற்றின் மூலம் திருப்தி செய்யும் அதாவது $b = a^2 - 2a - 3$ என்னும் சமன்பாடு உண்மையாகும்.
2. மறுதலையாக, யாதேனுமொரு (a, b) ஆள்கூறின் மூலம் சமன்பாடு $y = x^2 - 2x - 3$ திருப்தி செய்யப்படுமாயின் அப்போது (a, b) புள்ளியானது வரைபின் மீது அமையும்.

இவை இரண்டையும் எப்போதும் நினைவில் வைத்திருப்பது முக்கியமானதாகும். $(-1, 0)$ என்னும் புள்ளியானது வரைபின் மீது அமைகின்றது எனத் தெரிகின்றது. எனவே $y = x^2 - 2x - 3$ ஆனது $x = -1$, $y = 0$ இன் மூலம் திருப்திசெய்யப்பட வேண்டும். (மேலேயுள்ள விபரங்களின் படி). அதாவது, $0 = (-1)^2 - 2(-1) - 3$ ஆக வேண்டும். அது உண்மையாகின்றது என்பது சுருக்குதல் மூலம் தெரிகின்றது.

வேறு விதமாக கூறுவதாயின் $x = -1$ என்பது $x^2 - 2x - 3 = 0$ இன் ஒரு மூலமாகும். இவ்வாறான ஒரு நியாயித்தல் மூலம் $x = 3$ உம் இச்சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகின்றது எனக் கூறலாம். இன்னுமொரு விதமாகக் கூறுவதாயின் சமன்பாடு $x^2 - 2x - 3 = 0$ இன் மூலங்களாவன வரைபு $y = x^2 - 2x - 3$ ஆனது $x-$ அச்சைவெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆள்கூறுகளாகும். இதனை மேலும் பொதுவாக இவ்வாறும் எழுதலாம். சார்பு $y = ax^2 + bx + c$ இன் வரைபானது $x-$அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆள்கூறுகளாவன இருப்படிச் சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்களாகும்.

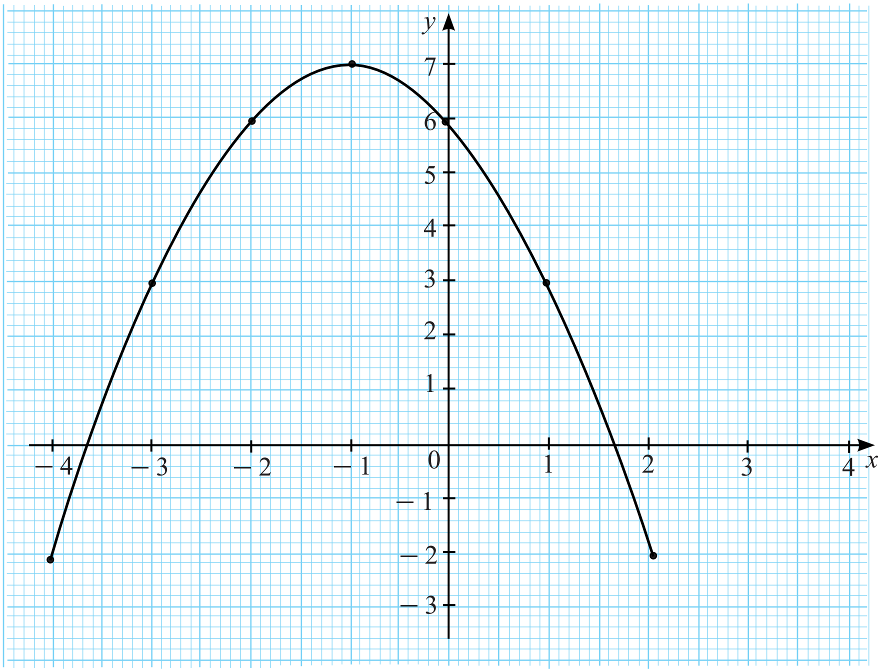
- மேற்குறித்த வரைபின் திரும்பற் புள்ளியில் சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம் பெறப்படும். இழிவுப் பெறுமானம் -4 ஆகும். திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(1, -4)$ ஆகும்.

$a < 0$ ஆகும்போது $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான வரைபை வரைதலும் அதன் பண்புகளை அறிந்து கொள்ளலும்

$y = -x^2 - 2x + 6$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்காக கீழே தரப்பட்டுள்ளவாறு $-4 \leq x \leq 2$ என்னும் வீச்சில் ஒரு பெறுமான அட்டவணையைத் தயாரிப்போம்.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$-x^2$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4
$-2x$	8	6	4	2	0	-2	-4
$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$
y	-2	3	6	7	6	3	-2
(x, y)	$(-4, -2)$	$(-3, 3)$	$(-2, 6)$	$(-1, 7)$	$(0, 6)$	$(1, 3)$	$(2, -2)$

x, y ஆகியவற்றின் பெறுமான வீச்சு பற்றிக் கவனத்திலெடுத்து x, y அச்சுகள் வழியே 10 சிறிய அலகுகளினால் ஓரலகு குறிப்பிடப்படும் வகையில் அளவிடையைத் தெரிந்தெடுத்து கீழே தரப்பட்டுள்ள முறையில் வரைபை வரையலாம்.



மேலேயுள்ள வரைபை அவதானித்து பின்வரும் விடயங்களை அறிந்து கொள்ளலாம்.

- உயர்வுப் பெறுமானம் 7 ஆவதுடன் வரைபானது $x = -1$ என்னும் கோடு பற்றிச் சமச்சீருடையது. இதற்கேற்ப வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = -1$ ஆகும்.
- திரும்பற் புள்ளியின் ஆளகூறுகள் $(-1, 7)$ ஆகும்.
- x இன் பெறுமானம் -3.6 வரை அதிகரிக்கும்போது y இன் பெறுமானம் மறையாக அதிகரிக்கின்றது.
- $x = -3.6$ இல் சார்பின் பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.
- x இன் பெறுமானம் -3.6 இலிருந்து -1 வரை அதிகரிக்கும்போது y யின் பெறுமானம் 0 இலிருந்து 7 வரை நேராக அதிகரிக்கின்றது.
- x இன் பெறுமானம் -1 இல் சார்பு 7 என்னும் உயர்வுப் பெறுமானத்தை எடுக்கின்றது.
- x இன் பெறுமானம் -1 இலிருந்து $+1.6$ வரை அதிகரிக்கும்போது சார்பின் பெறுமானம் நேராகக் குறைகின்றது.
- $x = +1.6$ இல் சார்பின் பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.
- x இன் பெறுமைமானம் 1.6 இலிருந்து அதிகரிக்கும்போது சார்பின் பெறுமானம் மறையாக குறைகின்றது.
- x இன் பெறுமானம் -3.6 இற்கும் $+1.6$ இற்கும் இடையில் இருக்கும்போது சார்பின் பெறுமானம் நேராகும். (அதாவது சார்பு நேராகும் x இன் வீச்சு $-3.6 < x < +1.6$) ஆகும்.
- x இன் பெறுமானம் -3.6 இலும் குறைவாகும்போதும் $+1.6$ இலும் அதிகரிக்கும்போதும் சார்பு மறையாகும். (அதாவது சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு $x < -3.6$ உம் $x > 1.6$ உம் ஆகும்.)

- வரைபு கோடு $y = 0$ ஐ (x அச்சு) இடைவெட்டுவது $x = -3.6$, $x = +1.6$ ஆகியவற்றிலாகும் அப்போது $-x^2 - 2x + 6 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் x பெறுமானங்கள் அல்லது மூலங்கள் $x = -3.6$, $x = +1.6$ ஆகும்.
- $0 \leq x \leq 2$ ஆகவுடைய x இன் பெறுமான வீச்சில் சார்பு எடுக்கும் உயர் பெறுமானம் 6 உம் இழிவுப் பெறுமானம் -2 உம் ஆகும்.

பயிற்சி 12.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள சார்பின் வரைபைப் பொருத்தமான அளவிடையில் தரப்பட்டுள்ள வீச்சில் வரைக.
$y = x^2 + 2x - 7$ $(-4 \leq x \leq 2)$

வரைபிலிருந்து
(a) இழிவுப் பெறுமானம்
(b) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
(c) சமச்சீர் அச்சை வரைந்து அதன் சமன்பாடு
(d) $y = 0$ ஆகும்போது x இன் பெறுமானங்கள்
(e) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(f) சார்பு நேராகும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(g) சார்பின் பெறுமானம் நேராகக் குறையும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(h) சார்பின் பெறுமானம் மறையாக அதிகரிக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சு
ஆகிவற்றைக் காண்க.

2. $y = x^2 - 4x + 2$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்குத் தயாரிக்கப்பட்ட பூரணமற்ற ஒரு பெறுமான அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	___	2	-1	___	-1	2	7

(i) மேலேயுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்தி x அச்சின் வழியே பத்து சிறிய சதுரங்களினால் ஓரலகும் y அச்சின் வழியே பத்து சிறிய சதுரங்களினால் ஓரலகும் குறிக்கப்படும் வகையில் அளவிடையை எடுத்து மேற்குறித்த சாரிபின் வரைபை வரைக

(ii) வரைபிலிருந்து
(a) சார்பின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
(b) இழிவுப் பெறுமானம்
(c) சார்பின் பெறுமானம் பூச்சியமாகும் x இன் பெறுமானங்கள்
(d) $y \leq -1$ ஆகும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(e) சமன்பாடு $x^2 - 4x + 2 = 0$ இன் மூலகங்கள்
(f) $\sqrt{2}$ இன் பெறுமானம் (முதலாம் தசம தானத்தில்)
ஆகியவற்றை எழுதுக.

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள சார்பின் வரைபை தரப்பட்டுள்ள பெறுமான வீச்சில் உரிய வரைபைப் பொருத்தமான அளவிடையை எடுத்து வரைக.
$y = -x^2 - 2x + 3\ (-4 \leq x \leq 2)$

வரைபிலிருந்து
(a) உயர்வுப் பெறுமானம்
(b) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
(c) சமச்சீர் அச்சை வரைந்து அதன் சமன்பாட்டைத் தருக.
(d) $y = 0$ ஆகும்போது x இன் பெறுமானங்கள்
(e) சார்பு நேராகும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(f) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(g) சார்பின் பெறுமானம் நேராக அதிகரிக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(h) சார்பின் பெறுமானம் மறையாகக் குறையும் x இன் பெறுமான வீச்சு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. $y = -2x^2 + 3x + 2$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்குப் பொருத்தமான x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கொண்ட பூரணமற்ற அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-2	-1	0	$\frac{3}{4}$	1	2	3	3.5
y	-12	-3	2	____	3	____	-7	-12

(i) மேலேயுள்ள அட்டவணையில் வெற்றிடங்களை நிரப்பி x அச்சு வழியே 10 சிறிய கட்டங்களினால் ஓரலகும் y அச்சு வழியே பத்து சிறிய கட்டங்களினால் இரு அலகுகளும் குறிக்கப்படும் வகையில் அளவிடையை எடுத்து மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.
(ii) வரைந்த வரைபிலிருந்து
(a) சார்பின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும்
(b) சார்பின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாட்டையும்
(c) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலகங்களையும்
(d) சார்பு நேராக அதிகரிக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(e) சார்பின் பெறுமானம் -4 ஆகும் x இன் பெறுமானங்கள்
என்பவற்றைத் தருக.

12.3 $y = \pm (x \pm b)^2 + c$ என்னும் வடிவிலான ஒரு சார்பின் வரைபை வரைதலும் அதன் பண்புகளை அறிந்துகொள்ளுதலும்

$y = \pm (x \pm b)^2 + c$ என்பதன் மூலம் ஓர் இருபடிச் சார்பு தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு இருபடிச் சார்பானது சிறப்பான ஒரு ஒரு முறையில், அதாவது $y = \pm (x \pm b)^2 + c$ என்னும் வடிவில் எழுதப்பட்டுள்ளது. அவ்வாறு எழுதியுள்ளபோது சார்பின் வரைபின் சில பண்புகளை வரைபினை வரையாது அறிந்துகொள்ளலாம். கீழேயுள்ள அட்டவணையில் அவ்வாறு அறிந்து கொள்ளக்கூடிய சில பண்புகள் தரப்பட்டுள்ளன.

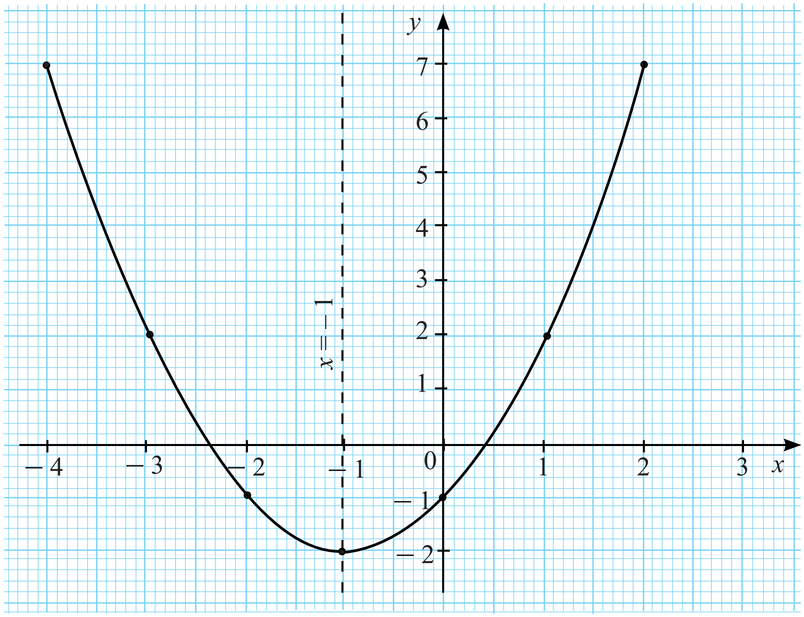
சார்பின் சமன்பாடு	திரும்பற் புள்ளியின் தன்மை	சார்பின் உயர்வு/ இழிவு பெறுமானம்	வரைபின் உயர்வு/ இழிவு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்	வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு	வரைபு y - அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
$y = (x + b)^2 + c$	இழிவு	c	$(-b, c)$	$x = -b$	$(0, b^2 + c)$
$y = -(x + b)^2 + c$	உயர்வு	c	$(-b, c)$	$x = -b$	$(0, -b^2 + c)$

மேலுயுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ள பண்புகளை வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்காக கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

$y = (x + 1)^2 - 2$ என்னும் சார்பைக் கருதுவோம். இங்கு $b = 1$ உம் $c = -2$ உம் ஆகும். இச்சார்பின் வரைபை x இன் பெறுமானங்கள் -4 இலிருந்து $+2$ வரையுள்ள பெறுமானங்களுக்கு ஒத்த y இன் பெறுமானங்களைப் பின்வருமாறு ஓர் அட்டவணை மூலம் கணிப்போம்.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$(x+1)^2$	9	4	1	0	1	4	9
-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
y	7	2	-1	-2	-1	2	7
(x, y)	$(-4, 7)$	$(-3, 2)$	$(-2, -1)$	$(-1, -2)$	$(0, -1)$	$(1, 2)$	$(2, 7)$

x அச்சின் வழியே 10 சிறிய பிரிவுகளினால் ஓர் அலகும். y அச்சு வழியே 10 சிறிய பிரிவுகளினால் ஓர் அலகும் ஆகுமாறு அளவிடைக்கு மேற்குறித்த சார்பின் வரைபைக் கீழே தரப்பட்டுள்ளவாறு வரையலாம்.



குறிப்பு:

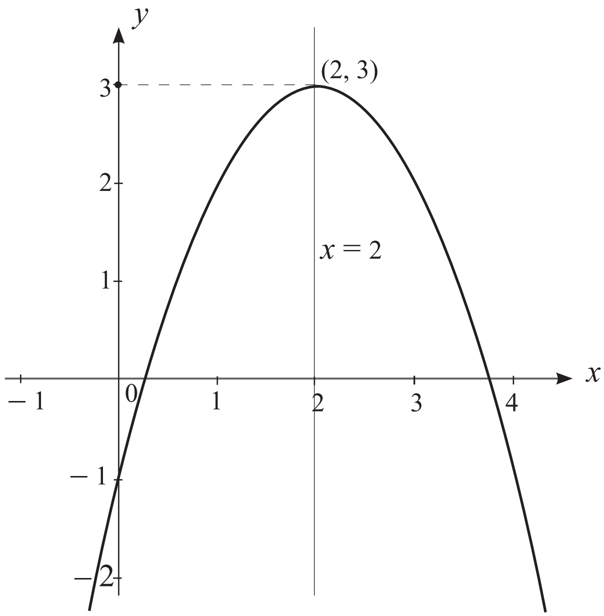
இவ்வரைபுக்கு ஓர் இழிவுப் புள்ளி உண்டு. சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம் -2 $(= c)$ ஆகும். வரைபின் இழிவுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(-1, -2)$ அதாவது $(-b, c)$ ஆவதுடன் சமச்சீர் அச்சு $x = -1$ (அதாவது $x = -b$ ஆகும்.)

ஓர் இருபடிச் சார்பின் வரைபு $x = \pm(x+b)^2 - c$ என்னும் வடிவில் தரப்பட்டுள்ளபோது மேற்குறித்த அட்டவணையில் பண்புகளின் அடிப்படையில் வரைபின் பருமட்டான குறிப்பை வரையலாம். கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தில் அவ்வாறு பருமட்டான ஒரு வரைபை வரையும் முறை விளக்கப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 1

$y = -\ (x-2)^2 + 3$ என்னும் வரைபை பருமட்டாக வரைக.

இச்சார்பின் $(x-2)^2$ இன் குணகம் மறை என்பதால் வரைபின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(2, 3)$ ஆகும். சமச்சீர் அச்சு $x = 2$ ஆகும் மேலும் வரைபானது y - அச்சை வெட்டும் இடத்தைக் கண்டுகொள்வாற்காக $y = -\ (x-2)^2 + 3$ இல் $x = 0$ ஐப் பிரதியிடுவோம். அப்போது $y = -(0-2)^2 + 3 = -1$ பெறப்படும் அதற்கேற்ப பின்வருவது போன்ற ஒரு பருமட்டான வரைபை வரையலாம்.



உதாரணம் 2

$y = x^2 + 3x - 4$ என்னும் சார்பின் வரைபில்

(i) வரைபின் தன்மை

(ii) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு

(iii) உயர்வு/ இழிவுப் பெறுமானம்

(iv) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

ஆகியவற்றைத் தருக.

சார்பு $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவில் தரப்பட்டுள்ளது. முதலில் அதனை $y = (x + b)^2 + c$ என்னும் வடிவில் எழுதுவோம். இதற்கு நிறைவர்க்கமாக்கலைப் பயன்படுத்துவோம்.

$y = x^2 + 3x - 4$

$y = (x + \frac{3}{2})^2 - 4 - \frac{9}{4}$ $\quad y = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$

(i) வரைபு பரவளைவானது

(ii) $x = -\frac{3}{2}$ அதாவது $x = -1\frac{1}{2}$

(iii) இழிவுப் பெறுமானம் $-\frac{25}{4}$ ஆகும்.

(iii) $(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4})$

பயிற்சி 12.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பையும் அதற்கு எதிரே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள x இன் பெறுமான வீச்சில் பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைத் தெரிந்தெடுத்து வரைக.

(a) $y = (x-2)^2 - 3 \quad (-1 \leq x \leq 5)$ (b) $y = (x+3)^2 - 4 \quad (-6 \leq x \leq 0)$

மேலேயுள்ள ஒவ்வொரு வரைபிலிருந்தும்

(i) சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம்

(ii) சார்பின் இழிவுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

(iii) சமச்சீர் அச்சை வரைந்து அதன் சமன்பாடு

(iv) சார்பு நேராகும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(v) $y = 0$ ஆகும் x இன் பெறுமானங்கள்

(vi) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு

ஆகியவற்றைத் தருக.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பையும் அதற்கு எதிரே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள x இன் பெறுமான வீச்சில் பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைத் தெரிந்தெடுத்து வரைக.

(i) $y = -(x+2)^2 + 2 \quad (-5 \leq x \leq 1)$ (ii) $y = -(x-1)^2 + 3 \quad (-2 \leq x \leq 4)$

மேலே வரைந்த ஒவ்வொரு வரைபிலிருந்தும்

(i) சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானம்

(ii) சார்பின் உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

(iii) சார்பின் சமச்சீர் அச்சை வரைந்து அதன் சமன்பாடு

(iv) சார்பு நேராகும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(v) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(vi) $y = 0$ ஆகும் x இன் பெறுமானங்கள்

(vii) சார்பு நேராக அதிகரிக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(viii) சார்பு மறையாகக் குறையும் x இன் பெறுமான வீச்சு

ஆகியவற்றைத் தருக.

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பினதும் பருமட்டான வரைபுகளை வரைக.

(i) $y = (x-2)^2 - 3$

(ii) $y = 2 - (x+5)^2$

(iii) $y = x^2 + 6x - 1$

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்புக்குமுரிய வரைபை வரையாது சார்பின்

a. தன்மை **b.** சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு

c. உயர்வு/இழிவு பெறுமானம் **d.** திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

ஆகியவற்றை எழுதுக.

(i) $y = (x+2)^2 - 3$ (ii) $y = -(x-2)^2 + 4$ (iii) $y = -(x - \frac{3}{2})^2 + 1$

(iv) $y = 1\frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2})^2$ (v) $y = 3\frac{1}{3} + (x + 2\frac{1}{2})^2$ (vi) $y = (x^2 + 6x + 5)$

12.4 $y = \pm (x \pm a)(x \pm b)$ என்னும் வடிவிலான ஒரு சார்பின் வரைபு

$y = \pm (x \pm a)(x \pm b)$ இன் மூலம் ஓர் இருபடிச் சார்பு தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு இருபடிச் சார்பானது ஒரு சிறப்பு வடிவில், அதாவது $y = \pm (x - a)(x + b)$ என்னும் வடிவில் தரப்பட்டுள்ளது. அவ்வாறு தரப்பட்டுள்ளபோது சார்பின் வரைபின் சில பண்புகளை முன்னைய பகுதியைப் போன்றே வரைபை வரையாது பெற்றுக் கொள்ளலாம். கீழே அட்டவணையில் அவ்வாறு பெற்றுக் கொள்ளக் கூடிய சில பண்புகள் தரப்பட்டுள்ளன.

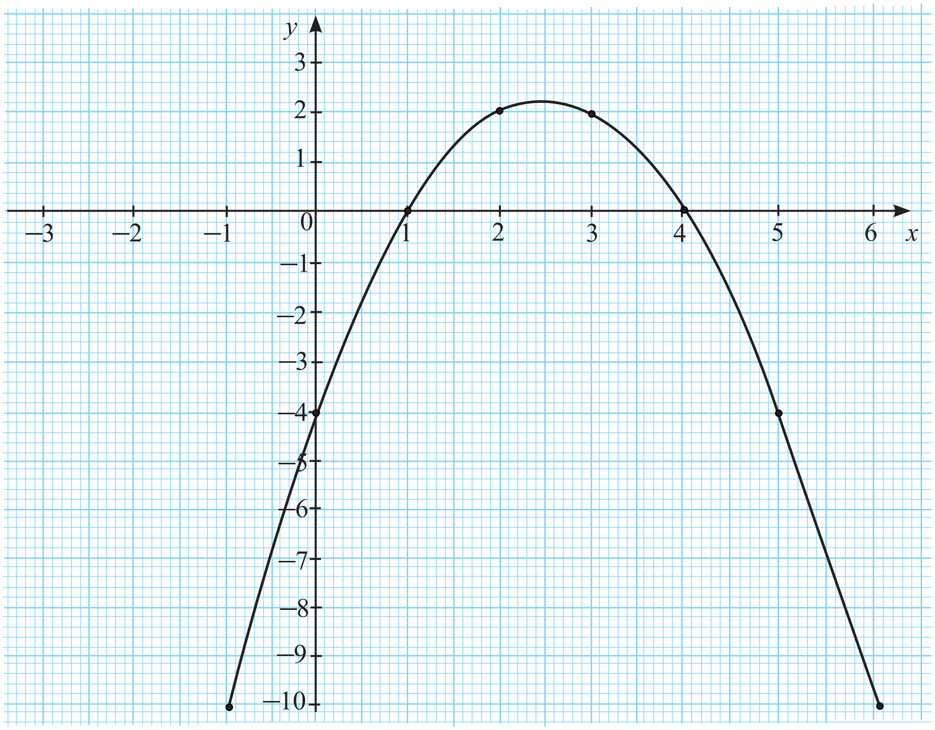
சார்பின் சமன்பாடு	திரும்பற் புள்ளி யின் தன்மை	வரைபின் உயர்வு/ இழிவுப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்	வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு	வரைபு x - அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள்	வரைபு y- அச்சை வெட்டும் புள்ளி
$y = (x + a)(x + b)$	இழிவு	$\left(-\frac{(a+b)}{2}, -\frac{(a-b)^2}{4}\right)$	$x = -\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$(-a, 0)$, $(-b, 0)$	$(0, ab)$
$y = -(x + a)(x + b)$	உயர்வு	$\left(-\frac{(a+b)}{2}, \frac{(a-b)^2}{4}\right)$	$x = -\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$(-a, 0)$, $(-b, 0)$	$(0, -ab)$

மேலே அட்டவணையில் காட்டப்பட்ட பண்புகளை வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தைக் கருதவும்.

$y = -(x - 1)(x - 4)$ என்னும் சார்பை நோக்குவோம். அது $y = -(x + a)(x + b)$ வடிவில் அமைந்ததாகும். (இங்கே $a = -1$, $b = -4$ ஆகும்).

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$-(x-1)(x-4)$	-10	-4	0	2	2	0	-4	-10
(x, y)	$(-1, -10)$	$(0, -4)$	$(1, 0)$	$(2, 2)$	$(3, 2)$	$(4, 0)$	$(5, -4)$	$(6, -10)$

x அச்சு வழியே 10 சிறிய அலகுகளை ஓரலகாகவும் y அச்சு வழியே 10 சிறிய அலகுகளை ஓரலகாகவும் அமையும் விதத்தில் மேலேயுள்ள சார்பின் வரைபை கீழே உள்ளவாறு வரையலாம்.



இவ்வரைபானது அட்டவணையில் உள்ள பண்புகளைப் பூர்த்திசெய்கிறது என்பதை மேலே 12.3 இல் உள்ள உதாரணத்தில் போன்று உறுதிப்படுத்திக் கொள்க.

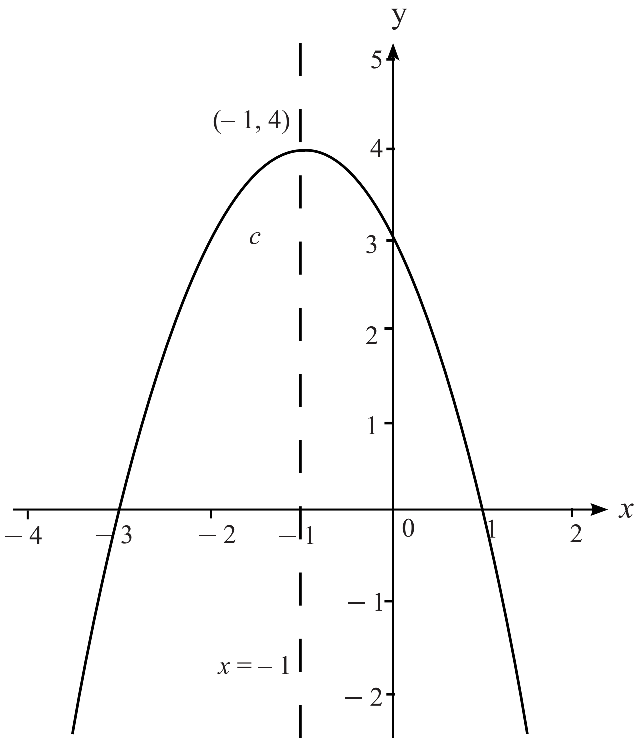
இருபடிச் சார்பின் வரைபு $y = \pm (x + a)(x + b)$ என்னும் வடிவில் தரப்பட்டுள்ளபோது மேலே அட்டவணையில் உள்ள பண்புகளைக் கொண்டு வரைபை பருமட்டாக வரையலாம். கீழே உள்ள உதாரணம் அவ்வாறான வரைபைப் பருமட்டாக வரையும் விதத்தை விளக்குகிறது.

உதாரணம் 1

$y = -(x + 3)(x - 1)$ என்னும் வரைபைப் பருமட்டாக வரைக.

இது $a = 3,\ b = -1$ ஆன $y = -(x + a)(x + b)$ வடிவிலான சார்பொன்றாகும். இச்சார்பின் x இன் குணகம் மறையாவதால் வரைபின் திரும்பற் புள்ளி உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் கொண்டது. $(-3, 0)$ உம் $(1, 0)$ உம் x - அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளாக அமைகின்றன. எனவே உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

$\left(-\dfrac{a + b}{2}, \dfrac{+(a - b)^2}{4}\right) = (-1, +4)$ ஆகின்றன. இதன்படி கீழே உள்ளவாறு பருமட்டான வரைபை வரையலாம்.



உதாரணம் 2

$y = x^2 + 5x - 14$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரையாது சார்பின்

(i) தன்மை

(ii) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு

(iii) உயர்வு/இழிவுப் புள்ளி

(iv) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

(v) வரைபு x அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் என்பவற்றை எழுதுக.

இனி இச்சார்பை $y = (x + a)(x + b)$ வடிவில் எழுதுவோம்.

$y = (x - 2)(x + 7)$ என எழுதலாம்.

(i) சார்பு இழிவுப் பெறுமானத்தையுடைய ஒரு பரவளையாகும்.

(ii) $a = -2,\ b = 7$ உம் என்பதால் சமச்சீரச்சானது,

$$x = -\frac{(a + b)}{2} = -\frac{(-2 + 7)}{2}$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

(iii) இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{-(a - b)^2}{4}$ இன்மூலம் பெறப்படுவதால்

இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{-(-2 - 7)^2}{4} = -\frac{81}{4}$

(iv) இழிவுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{81}{4}\right)$

(v) வரைபு x அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(-a, 0)$ உம் $(-b, 0)$ என்பதால் $(2, 0),\ (-7, 0)$ ஆகும்.

பயிற்சி 12.4

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பின் வரைபையும் அதற்கு எதிரே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள x இன் பெறுமான வீச்சில் பொருத்தமான ஓர் அளவிடையை தெரிந்தெடுத்து வரைக.

(a) $y = (x + 1)(x + 6)$ $\quad (-7 \leq x \leq 0)$

(b) $y = (x - 2)(x - 5)$ $\quad (0 \leq x \leq 7)$

(c) $y = -(x + 1)(x + 3)$ $\quad (-5 \leq x \leq 1)$

(d) $y = -(x - 5)(x - 3)$ $\quad (+1 \leq x \leq 7)$

மேலே வரைந்த ஒவ்வொரு வரைபிலிருந்தும்

(i) y பூச்சியமாகும் x இன் பெறுமானங்கள்

(ii) சார்பின் சமச்சீர் அச்சை வரைந்து அதன் சமன்பாடு

(iii) சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம்

(iv) சார்பின் இழிவுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

(v) சார்பு நேராகும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(vi) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(vii) தரப்பட்ட x இன் வீச்சில் y இன் தன்மை

ஆகியவற்றை எழுதுக.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பினதும் பருமட்டான வரைபை வரைக.

(i) $y = (x - 3)(x + 5)$

(ii) $y = (x - 1)(x - 2)$

(iii) $y = -(x + 3)(x - 6)$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்புகளினதும் வரைபுகளை வரையாது

a. சார்பின் தன்மை **b.** சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு

c. உயர்வு /இழிவுப் புள்ளி **d.** திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

என்பவற்றை எழுதுக.

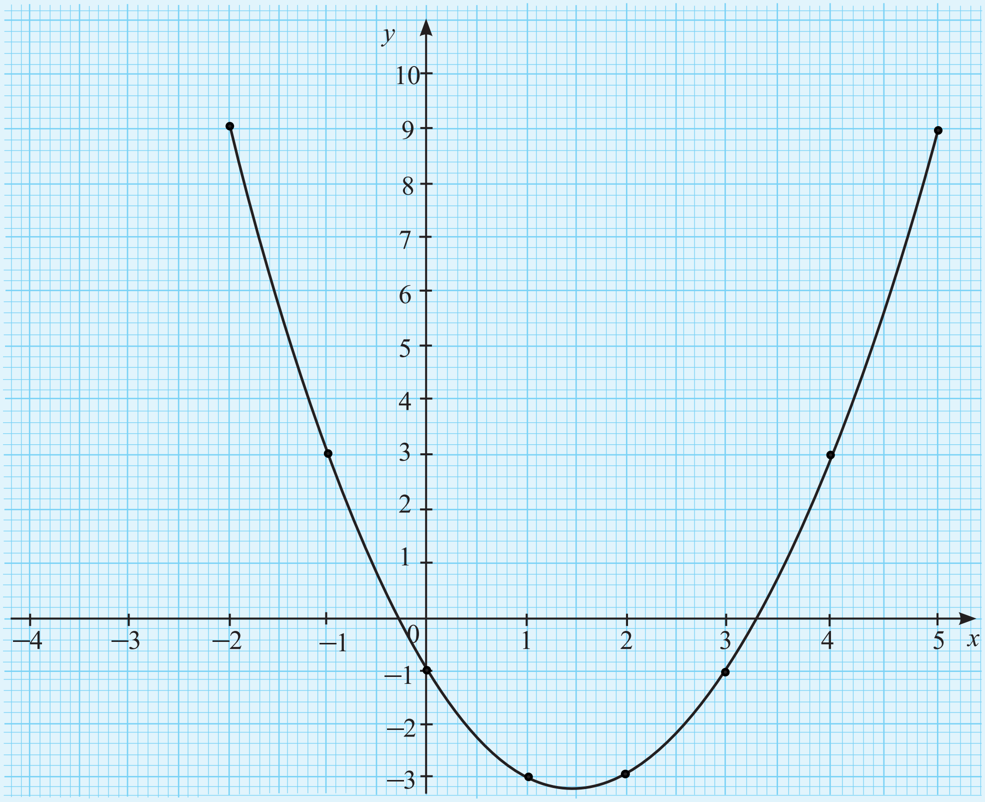
(i) $y = (x - 2)(x + 3)$ (ii) $y = (x + 1)(x - 4)$ (iii) $y = (x - 4)(x - 1)$

(iv) $y = -(x - \frac{1}{2})(x + 3)$ (v) $y = x^2 - 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$ (vi) $y = x^2 - 4x + 7$

(vii) $y = -x^2 - 6x - 5$ (viii) $y = -x^2 + 12x + 35$ (ix) $y = x^2 - x + 4$

பலவினப் பயிற்சி

1\. **(*a*)** $-2 \leq x \leq 5$ என்னும் ஆயிடையில் வரையப்பட்ட ஓர் இருபடிச் சார்பின் வரைபு உருவில் தரப்பட்டுள்ளது.



வரைபிலிருந்து

(i) $x = 3$ ஆகும்போது y இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) சமச்சீர் அச்சை வரைந்து அதன் சமன்பாட்டை எழுதுக.

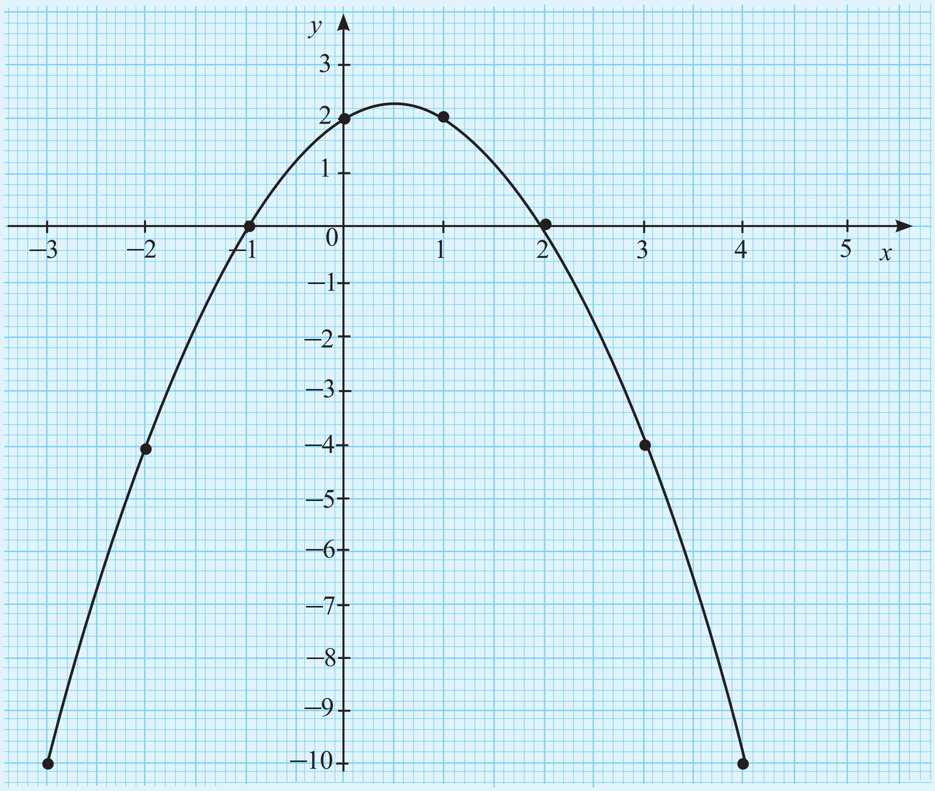
(iii) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.

(iv) இவ்விருபடிச் சார்பை $y = (x - a)^2 + b$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்க முடியுமாயின் a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(v) மேலே (iv) இல் பெற்ற சார்பில் $y = 0$ ஆகும் x இன் பெறுமானங்களைப் பெறுக.

(vi) இச்சார்பின் சமச்சீர் அச்சைக் கொண்டதும் 5 ஐ உயர்வு பெறுமானமாகவும் x^2 இன் குணகத்தை 1 ஆகவும் கொண்டதுமான சார்பை எழுதுக.

(*b*) $-3 \le x \le 4$ என்னும் ஆயிடையில் தரப்பட்டுள்ள ஓர் இருபடிச் சார்பின் வரைபு உருவில் தரப்பட்டுள்ளது.



(i) $y = 0$ ஆகும் x இன் பெறுமானங்களை எழுதுக.

(ii) மேலே (i) இன் விடையிலிருந்து வரைபுக்குரிய இருபடிச் சார்பை $y = -(x - a)(x - b)$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்க முடியுமாயின் a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(iii) மேலே (ii) இல் a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைப் பிரதியிட்டுப் பெறப்படும் இருபடிச் சார்பை $y = -(x - p)^2 + q$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைத்து சார்பின் உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைப் பெற்று அப்பெறுமானங்களை வரைபிலிருந்து உறுதிப்படுத்துக.

(iv) $y \le -4$ ஆகும்போது x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.

(v) சார்பின் பெறுமானம் நேராக அதிகரிக்கும் x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.

2. $(x+2)$, $(3-x)$ என்பன இரண்டு எண்களாகும். $y=(x+2)(3-x)$ என்பதனால் அவ்விரு எண்களினதும் பெருக்கம் பெறப்படும்.

(i) கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	___	___	6	___	4	___	-6

(ii) பொருத்தமான ஓர் அளவிடையில் மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.

(iii) பெருக்கத்தின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iv) பெருக்கத்தின் உயர்வுப் பெறுமானத்திற்குரிய x ஐக் காண்க.

(v) பெருக்கம் பூச்சியமாகும் x இன் பெறுமானங்களை எழுதுக.

(vi) $y > 3$ ஆகும் x இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.

(vi) x ஆனது எப்பெறுமான ஆயிடையில் மாறும்போது பெருக்கமானது படிப் படியாக அதிகரிக்கும் எனக் காண்க.

(viii) x எப்பெறுமான ஆயிடையில் பெருக்கத்திற்கான நேர்ப் பெறுமானம் பெறப்படும்.

(ix) $-1 \leq x \leq 3$ என்னும் ஆயிடையில் பெருக்கத்தின் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(x) $5 \leq x \leq 8$ என்னும் வீச்சில் பெருக்கத்தில் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. $y = (x-2)^2 - 2$ என்னும் சார்பின் தரப்பட்டுள்ள x இன் சில பெறுமானங்களுக்கு ஒத்த y இன் பெறுமானங்களை உள்ளடக்கிய பூரணமற்ற ஓர் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	7	2	-1	-2	___	2	7

(i) மேலே தரப்பட்ட அட்டவணைப் பூரணப்படுத்துக.

(ii) பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைத் தெரிந்தெடுத்து மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.

(iii) சார்பின் திரும்பற் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

(iv) $y < 0$ ஆகும்போது x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.

(v) வரைபில் இருந்தும் அட்சரகணித முறையிலும் $x^2 - 4x + 2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலகங்களைக் கண்டு அதிலிருந்து $\sqrt{2}$ இற்கான கிட்டிய பெறுமானத்தைப் பெறுக.

(vi) சார்பின் பெறுமானம் 3 ஆவது x இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு என எழுதுக.

4. $y = -(x+1)(x-3)$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்குப் பொருத்தமான x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கொண்ட பூரணமற்ற ஓர் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	___	0	3	4	3	___	-5

(i) $x = -2$ ஆகும்போதும் $x = 3$ ஆகும்போதும் y இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
(ii) பொருத்தமான ஓர் அளவிடையில் மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.
(iii) சார்பின் உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.
(iv) $y = 0$ ஆகும்போது x இன் பெறுமானங்களைப் பெற்று அதிலிருந்து சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைப் பெற்று சரியானதென்பதை உறுதிப்படுத்துக.
(v) $y \geq -1$ ஆகும் x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.
(vi) $-x^2 + 2x + 3 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை எழுதுக.
(vii) $1 \leq x \leq 4$ என்னும் ஆயிடையில் சார்பின் நடத்தையை விபரிக்க.

5. $y = 5 - x - x^2$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்குப் பொருத்தமான x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கொண்ட பூரணமற்ற ஓர் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	___	-1	3	5	5	___	-1	-7

(i) $x = -4$ உம் $x = 1$ உம் ஆகும்போது y இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
(ii) பொருத்தமான ஓர் அளவிடையில் மேற்குறித்த வரைபை வரைக.
(iii) சார்பின் உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.
(iv) சார்பின் பெறுமானம் -5 இலிருந்து $+3$ வரை அதிகரிக்கும்போது x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.
(v) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.
(vi) வரைபிலிருந்து $-x^2 - x + 5 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.
(vii) $y - 3 = 5 - x - x^2$ என்னும் சார்பின் உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

13 சமன்பாடுகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்
- விகிதமுறும் குணகங்களைக் கொண்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை உருவாக்கவும் தீர்க்கவும்
- காரணிப்படுத்துவதன் மூலம், வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல் மூலம், சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பது தொடர்பாக நீங்கள் முன்னர் பெற்றுள்ள அறிவை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(a) $6x + 2y = 1$
$4x - y = 3$

(b) $a + 2b = 3$
$2a + 3b = 4$

(c) $m - 4n = 6$
$3m + 2n = 4$

(d) $9p - 2q = 13$
$7p - 3q = 0$

(e) $2x + 3y = 12$
$3x - 4y = 1$

(f) $3a + 12 = 2b$
$13 + 2a = 3b$

2. குமாரியிடம் இரண்டு ரூபாய் நாணயங்களும் ஐந்து ரூபாய் நாணயங்களும் 20 உண்டு. அவற்றின் மொத்தப் பெறுமதி ரூ. 55 ஆகும். குமாரியிடம் உள்ளது ரூ. 2 நாணயங்களின் எண்ணிக்கையை x எனவும் ரூ. 5 நாணயங்களின் எண்ணிக்கை y எனவும் கொண்டு

(i) தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் குறிக்கும் இரண்டு சமன்பாடுகளை எழுதுக.

(ii) அதிலிருந்து குமாரியிடம் உள்ள ரூ. 2 நாணயங்களினதும் ரூ. 5 நாணயங்களினதும் எண்ணிக்கைகளைக் காண்க.

3. கமலா, விமலா ஆகியோரிடம் குறித்த தொகைப் பணம் உண்டு. கமலாவிடமும் விமலாவிடமும் உள்ள பணத்தின் கூட்டுத்தொகையுடன் ரூ. 30 ஐக் கூட்டும்போது மொத்தப் பணம் ரூ.175 ஆகும். கமலாவிடம், விமலாவிடம் உள்ள பணத்தின் இருமடங்கிலும் ரூ. 95 குறைவாக உள்ளது. கமலாவிடம் உள்ள பணம் ரூ. x எனவும் விமலாவிடம் உள்ள பணம் ரூ. y எனவும் கொண்டு,

(i) தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு சோடி சமன்பாட்டை எழுதுக.

(ii) அதிலிருந்து கமலாவிடமும் விமலாவிடமும் உள்ள பணத்தை தனித்தனியே காண்க.

4. " 2 புத்தகங்களையும் ஒரு பேனையையும் வாங்குவதற்கு ரூ. 65 செலவாகும். அவ்வாறான 2 பேனைகளை வாங்குவதற்குச் செலவாகும் பணத்தைக் கொண்டு அவ்வாறான ஒரு புத்தகத்தை வாங்க முடியும்" என்ற தகவல்களிருந்து ஒரு சோடி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை உருவாக்கி, ஒரு புத்தகத்தின் விலையையும் ஒரு பேனையின் விலையையும் வெவ்வேறாகக் காண்க.

13.1 பின்னவடிவிலான குணகங்களைக் கொண்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்

ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடி ஒன்றில் தெரியாக் கணியங்களின் குணகங்கள் நிறைவெண்களாக உள்ளபோது அவ்வொருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து தெரியாக் கணியங்களின் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு நாம் இதற்கு முன்னர் கற்றோம். இனி, குணகங்களாகப் பின்னங்களையுடைய ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை உருவாக்குதல், அவற்றைத் தீர்த்தல் என்பன பற்றி உதாரணங்களுடன் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

ரமீஸ், ராஜா ஆகியோரிடம் ஒரு குறித்த தொகைப் பணம் உண்டு. ரமீஸிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{2}$ இற்கு ராஜாவிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{3}$ ஐக் கூட்டும்போது ரூ.20 பெறப்படும். ரமீஸிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{4}$ ஆனது ராஜாவிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{6}$ இற்கு சமனாகுமெனின் இருவரிடமும் உள்ள பணத் தொகைகளை வெவ்வேறாகக் காண்க.

இப்பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்கு, ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியொன்றை உருவாக்கித் தீர்க்கும் முறையைப் பார்ப்போம். ரமீஸிடம் உள்ள பணம் ரூ. x எனவும் ராஜாவிடம் உள்ள பணம் ரூ. y எனவும் கொள்வோம்.
அப்போது

ரமீஸீடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{2}$ ஆகிய $\frac{1}{2}x$ ஐயும் ராஜாவிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{3}$ ஆகிய $\frac{1}{3}y$ ஐயும் கூட்டும்போது $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$ பெறப்படும். அது ரூ. 20 இற்கு சமனாவதால்

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 20$ ——— ① என்றவாறு ஒரு சமன்பாடு பெறப்படும்.

அவ்வாறே ரமீஸிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{4}$ ஆனது ராஜாவிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{6}$ இற்குச் சமன் என்பதால்,

$\frac{1}{4}x = \frac{1}{6}y$ என்ற சமன்பாடு பெறப்படும்.

அது $\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 0$ ——— ② என எழுதப்படும்.

குணகங்களாகப் பின்னங்களைக் கொண்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தலில் முதலில் அக்குணகங்களை நிறைவெண்களாக்கித் தீர்த்தல் பெரும்பாலும் இலகுவானதாகும். இதற்கேற்ப சமன்பாடு ① இல் குணகங்களின் பகுதி எண்களின் பொது மடங்குகளுட் சிறியதினால் சமன்பாட்டைப் பெருக்குவதன் மூலம், இலகுவாக குணகங்களை நிறைவெண்களாக மாற்றிக் கொள்ள முடியும்.

எனவே சமன்பாடு ① ஐ 2, 3 ஆகியவற்றின் பொ.ம.சி ஆகிய 6 இனாலும் சமன்பாடு ② ஐ 4, 6 ஆகியவற்றின் பொ.ம.சி ஆகிய 12 இனாலும் பெருக்குவோம்

① $\times$ 6 இனால் $6 \times \frac{1}{2}x + 6 \times \frac{1}{3}y = 6 \times 20$

$$\therefore 3x + 2y = 120 \quad \text{———} ③$$

② $\times$ 12 இனால் $12 \times \frac{1}{4}x - 12 \times \frac{1}{6}y = 12 \times 0$

$$3x - 2y = 0 \quad \text{———} ④$$

இனி ①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்குப் பதிலாக அவற்றுக்குச் சமவலுவான ③, ④ ஆகியவற்றைத் தீர்க்கலாம். எனவே ③, ④ ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்போம்.

③ + ④ $(3x + 2y) + (3x - 2y) = 120 + 0$

$$3x + 2y + 3x - 2y = 120$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{120}{6}$$

$$x = 20$$

$x = 20$ ஐச் சமன்பாடு ④ இல் பிரதியிடுவதால்,

$$3 \times 20 - 2y = 0$$

$$2y = 60$$

$$y = 30$$

$\therefore$ ரமீஸிடம் உள்ள பணம் = ரூ. 20

$\therefore$ ராஜாவிடம் உள்ள பணம் = ரூ. 30

குறிப்பு : இப்பிரசினத்தில் குணகங்களை நிறைவெண்களாக மாற்றிய பின்னர் சமன்பாடுகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் y ஐ நீக்கி நாம் x இன் பெறுமானத்தைக் கண்டோம். தேவையாயின் ஒரு தெரியாக் கணியத்தை எழுவாயாக மாற்றி மற்றைய சமன்பாட்டில் பிரதியிடுவதன் மூலமும் விடையைப் பெற்றுக் கொள்ளலாம். அவ்வாறான ஓர் உதாரணத்தை இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணம் 2

தீர்க்க.

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2 \quad \text{——— ①}$$

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9 \quad \text{——— ②}$$

இச்சமன்பாட்டுச் சோடியில் ஒரு தெரியாக் கணியத்தை எழுவாயாக்கி மற்றைய சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுத் தீர்ப்போம்.

இதற்கு,

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$$

$$\frac{1}{6}a = -2 - \frac{1}{5}b$$

$$a = -12 + \frac{6}{5}b \quad \text{——— ③}$$ (இருபக்கமும் 6 ஆல் பெருக்குவதால்)

a இன் இப்பெறுமானத்தை சமன்பாடு ② இல் பிரதியிடுவோம்.

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$$

$$\frac{1}{3}(-12 + \frac{6}{5}b) + \frac{1}{4}b = 9$$

$$-4 + \frac{2}{5}b + \frac{1}{4}b = 9$$

4, 5 ஆகியவற்றின் பொ.ம.சி. ஆன 20 ஐப் பொதுப்பகுதி எண்ணாகக் கொண்டு பின்னச் சுருக்கலைச் செய்வோம்.

$$\frac{8}{20}b + \frac{5}{20}b = 9 + 4$$

$$\frac{13}{20}b = 13$$

$$b = \frac{13 \times 20}{13}$$

$$b = 20$$

$b = 20$ ஐச் சமன்பாடு ③ இல் பிரதியிடுவதால் (இங்கு எந்தச் சமன்பாட்டிலும் பிரதியிடலாம்)

$$a = -12 + \frac{6}{5}b$$

$$a = -12 + \frac{6}{5} \times 20$$

$a = -12 + 24$

$a = 12$

அதாவது தீர்வுகள் $a = 12,\ b = 20$ உம் ஆகும்.

மேற்குறித்த ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியின் தீர்வுகளான $a = 12,\ b = 20$ ஆகிய பெறுமானங்களை அச்சமன்பாடுகளில் பிரதியிடுவதன் மூலம் அத்தீர்வுகள் உண்மையானவை என்பதை அறிந்து கொள்ளலாம்.

$a = 12,\ b = 20$ என்பதை சமன்பாடு ① இல் இடது கைப்பக்கத்தில் பிரதியிடுவோம்.

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$$

இடது கைப்பக்கம் $= \frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b$

$= \frac{1}{6} \times 12 - \frac{1}{5} \times 20$

$= 2 - 4$

$= -2$

அதாவது, இடது கைப்பக்கம் = வலது கைப்பக்கம்

$\therefore\ \frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$ என்னும் சமன்பாடு $a = 12, b = 20$ மூலம் திருப்தி செய்யப்படுகிறது.

இவ்வாறே,

$a = 12, b = 20$ ஐச் சமன்பாடு ② இல் இடது கைப்பக்கத்தில் பிரதியிடுவோம்.

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$$

இடது கைப்பக்கம் $= \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b$

$= \frac{1}{3} \times 12 + \frac{1}{4} \times 20$

$= 4 + 5$

$= 9$

$\therefore$ இடது கைப்பக்கம் = வலது கைப்பக்கம்

அதாவது, சமன்பாடு $\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$ என்பது $a = 12,\ b = 20$ மூலம் திருப்தி செய்யப்படுகிறது.

இதற்கேற்ப $a = 12,\ b = 20$ ஆகியவை சரியான தீர்வுகள் என்பது தெளிவாகின்றது.

உதாரணம் 3

தீர்க்க:

$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$

$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4$

$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$ ——— ①

$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4$ ——— ② எனக் கொள்வோம்.

உதாரணம் 1 ஐப் போன்று இச்சமன்பாடுகளிலுள்ள பின்னவடிவிலான குணகங்களை நிறைவெண்களாக மாற்றித் தீர்க்கலாம். மேலும் ஒரு மாறியின் பின்னவடிவிலான குணகங்களைச் சமப்படுத்துவதன் மூலமும் தீர்க்க முடியும். இதற்காக, சமன்பாடு ② ஐ 2 ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் n இன் குணகங்களைச் சமப்படுத்திக் கொள்வோம்.

② × 2 இனால் $\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n = 8$ ——— ③

③ − ① இனால் $(\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n) - (\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n) = 8 - 1$

$$\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n - \frac{1}{2}m - \frac{2}{3}n = 7$$

$$\frac{10}{6}m - \frac{3}{6}m = 7$$

$$\frac{7}{6}m = 7$$

$$7m = 7 \times 6$$

$$m = 6$$

$m = 6$ ஐ சமன்பாடு ① இல் பிரதியிடுவோம்

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{1}{2} \times 6 + \frac{2}{3}n = 1$$

$$3 + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{2}{3}n = 1 - 3$$

$$\frac{2}{3}n = -2$$

$$2n = -6$$

$$n = -3$$

அதாவது தீர்வுகள் $m = 6,\ n = -3$ ஆகும்.

முன்னர் தீர்த்த பிரசினத்தில் போன்று விடையை தொடக்கச் சமன்பாடுகளில் பிரதியிட்டுப் பார்ப்பதன் மூலம் விடையின் செவ்வைத் தன்மையை உறுதிப்படுத்திக் கொள்ளலாம்.
$m = 6,\ n = -3$ ஆகிய தீர்வுகளைப் பிரதியிடுவோம்.

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1 \quad \text{①}$$

இடது கைப்பக்கம் $= \frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n$

$= \frac{1}{2} \times 6 + \frac{2}{3} \times (-3)$

$= 3 - 2$

$= 1$

இடது கைப்பக்கம் = வலது கைப்பக்கம்

$$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4 \quad \text{②}$$

இடது கைப்பக்கம் $= \frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n$

$= \frac{5}{6} \times 6 + \frac{1}{3} \times (-3)$

$= 5 - 1$

$= 4$

இடது கைப்பக்கம் = வலது கைப்பக்கம்

இதற்கேற்ப, $m = 6,\ n = -3$ ஆகிய தீர்வுகள் சரியானவை ஆகும்.

பயிற்சி 13.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(a) $\frac{3}{5}a + \frac{1}{3}b = 3$
$\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b = 8$

(b) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}y = 9$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 2$

(c) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 4$
$\frac{1}{2}x - y = 1$

(d) $\frac{2}{7}p - \frac{1}{3}q = 5$
$\frac{1}{2}p - 1\frac{2}{3}q = 12$

(e) $\frac{m}{4} + \frac{5n}{3} = 36$
$\frac{3m}{8} - \frac{5n}{12} = -2$

(f) $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{2} = -1$
$4x - 5y = 22$

2. ஒரு பாடசாலையில் நடைபெற்ற ஓர் உற்சவத்தில் விருந்துபசாரத்துக்குச் செலாவாகும் பணத்தில் $\frac{1}{2}$ ஐயும் அலங்கரிப்புகளுக்குச் செலவாகும் பணத்தில் $\frac{1}{3}$ ஐயும் தாம் செலவு செய்வதாக பழைய மாணவர் சங்கம் பொறுப்பேற்றுக் கொண்டது. இதற்கேற்ப பழைய மாணவர் சங்கம் வழங்கிய பணம் ரூ. 20 000 ஆகும். விருந்துபசாரத்துக்கும் அலங்கரிப்புகளுக்கும் செலவாகும் எஞ்சிய பணத்தை நலன்புரிச் சங்கம் பொறுப்பேற்றுக் கொண்டது. இதற்கேற்ப நலன்புரிச் சங்கம் ரூ. 30 000 ஐ வழங்கியது.

(i) விருந்துபசாரத்துக்கு செலவான பணம் ரூ. x எனவும் அலங்கரிப்பதற்கு செலவான பணம் ரூ. y எனவும் கொண்டு இத்தகவல்களைக் குறிக்கும் ஒரு சோடி சமன்பாடுகளை எழுதுக.

(ii) அவ்வொருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து, விருந்துபசாரத்துக்கும் அலங்கரிப்புகளுக்கும் செலவான பணத்தைத் தனித்தனியே காண்க.

13.2 காரணிகளைப் பயன்படுத்தி இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

$ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் வடிவிலான ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் (மூலங்களை) காணும் முறையை நீங்கள் முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள். அவ்வாறான சில உதாரணங்களை நினைவுகூர்வோம்.

உதாரணம் 1

$x^2 - 5x + 6 = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

$(x-2)(x-3) = 0$ (காரணிகளைக் காண்பதால்)

$x - 2 = 0$ அல்லது $x - 3 = 0$ ஆக வேண்டும்

$\therefore\ x = 2$ அல்லது $x = 3$

$\therefore\ x = 2,\ x = 3$ ஆகியன இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

உதாரணம் 2

$2x^2 + 3x - 9 = 0$ இன் மூலங்களைக் காண்க

$2x^2 + 6x - 3x - 9 = 0$

$2x(x+3) - 3(x+3) = 0$

$(2x-3)(x+3) = 0$ (காரணிப்படுத்துவதால்)

$2x - 3 = 0$ அல்லது $x + 3 = 0$ ஆக வேண்டும்

$x = \frac{3}{2}$ அல்லது $x = -3$

$x = 1\frac{1}{2},\ x = -3$ ஆகியன இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

இனிச் சற்று சிக்கலான ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்ப்போம்.

உதாரணம் 3

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{3x+2} = 1$$ இன் மூலங்களைக் காண்க.

இச்சமன்பாட்டை நோக்கும்போது எமக்கு ஓர் இருபடிச்சமன்பாடாகத் தோன்றவில்லை. ஆயினும் இச்சமன்பாட்டைப் பின்னமில்லாத ஒரு சமன்பாடாக மாற்றும்போது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இதற்காக, முதலில் சமன்பாட்டின் இடதுகைப்பக்க பொதுப் பகுதி எண்ணைக் கருதுவோம். (முழுச் சமன்பாட்டையும் $2x - 1$, $3x + 2$ ஆகியவற்றின் பொதுமடங்குகளில் சிறியதினால் பெருக்குவதன் மூலமும் இதனைச் செய்யலாம்)

$$\frac{3(3x+2) - 2(2x-1)}{(2x-1)(3x+2)} = 1$$ (இடது கைப்பக்கத்தை தனிப்பின்னமாக எழுதுவதால்)

$3(3x+2) - 2(2x-1) = (2x-1)(3x+2)$ (குறுக்குப் பெருக்கத்தால்)

$9x + 6 - 4x + 2 = 6x^2 + 4x - 3x - 2$ (விரித்தெழுதுவதால்)

$6x^2 - 4x - 10 = 0$ (சுருக்குவதால்)

$3x^2 - 2x - 5 = 0$ (சமன்பாட்டின் சகல உறுப்புகளையும் 2 ஆல் வகுப்பதால்)

$3x^2 - 5x + 3x - 5 = 0$

$x(3x-5) + 1(3x-5) = 0$

$(3x-5)(x+1) = 0$

$3x - 5 = 0$, $x + 1 = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதால்,

$x = \frac{5}{3}$ அல்லது $x = -1$

$x = 1\frac{2}{3}$ அல்லது $x = -1$

$x = 1\frac{2}{3}$ அல்லது $x = -1$ இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

சில உதாரணங்கள் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதை மீட்டிய நாம் இப்போது இருபடிச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கக்கூடிய ஒரு பிரசினம் பற்றி ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 4

இரண்டு அடுத்துள்ள நிறைவெண்களின் பெருக்கம் 12 ஆகும். அவ்வெண் சோடியைக் காண்க.

இப்பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்காக ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தும் முறையை ஆராய்வோம். அடுத்துள்ள இரண்டு எண்களிலும் சிறிய எண்ணை x எனக் கொள்வோம். அப்போது மற்றைய எண் $x + 1$ ஆகும்

இதற்கேற்ப, அடுத்துள்ள எண் சோடியை x, $(x + 1)$ என எடுக்கலாம். இரண்டு எண்களினதும் பெருக்கம் 12 என்பதால்

$x \times (x+1) = 12$ என எழுதலாம்.

$\therefore\ x^2 + x - 12 = 0$

இதன் காரணிகளைக் காணும்போது,

$(x - 3)\,(x + 4) = 0$ ஆகும்.

$\therefore\ x - 3 = 0$ அல்லது $x + 4 = 0$ ஆக வேண்டும்

$\therefore\ x = 3$ அல்லது $x = -4$

$x = 3$ அல்லது $x = -4$ என்பன மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

$x = 3$ ஆகும்போது அடுத்துள்ள எண் $(x + 1) = 3 + 1 = 4$ ஆகும்.

$x = -4$ ஆகும்போது அடுத்துள்ள எண் $(x + 1) = -4 + 1 = -3$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப பெருக்கம் 12 ஆக வரும் அடுத்துள்ள நிறைவெண்களின் இரண்டு சோடிகள் இருப்பதுடன் அவை "3, 4" உம் "–3, – 4" உம் ஆகும். மேற்குறித்த இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 + x - 12$ இன் தீர்வுகளை அச்சமன்பாட்டிலேயே பிரதியிட்டு அத்தீர்வுகள் உண்மையானவை எனப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

$x^2 + x - 12 = 0$

$x = 3$ ஐ சமன்பாட்டின் இடது கைப்பக்கத்தில் பிரதியிடுவோம்

இ.கை.ப. $= x^2 + x - 12$
$= 3^2 + 3 - 12$
$= 9 + 3 - 12$
$= 12 - 12$
$= 0$

$\therefore$ இ.கை.ப. = வ.கை.ப.

$x = -4$ ஐ சமன்பாட்டின் இடது கைப்பக்கத்தில் பிரதியிடுவோம்

இ.கை.ப. $= x^2 + x - 12$
$= (-4)^2 + (-4) - 12$
$= 16 - 4 - 12$
$= 12 - 12$
$= 0$

$\therefore$ இ.கை.ப. = வ.கை.ப.

இதன்படி சமன்பாடு $x^2 + x - 12 = 0$ இன் தீர்வுகள் 3,–4 என உறுதிப்படுத்தப்படுகிறது.

உதாரணம் 5

ஒரு செவ்வக வடிவிலான காணியின் நீளமானது அதன் அகலத்திலும் 5 மீற்றரினால் கூடியதாகும். அதன் பரப்பளவு 150 சதுர மீற்றர்களாகும்.

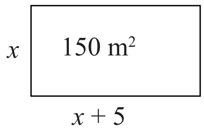
(i) காணியின் அகலத்தை x மீற்றர் எனக் கொண்டு, காணியின் நீளத்துக்கான ஒரு கோவையை x இன் சார்பில் எழுதுக.

(ii) x இலான ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

(iii) சமன்பாட்டைத் தீர்த்து காணியின் நீளத்தையும் அகலத்தையும் காண்க.

(i) அகலத்தை x மீற்றர் எனக் கொள்வோம். அப்போது
நீளம் $= x + 5$ மீற்றர் ஆகும்

(ii) இத்தகவலை ஓர் உருவில் குறித்தால் மிகத்தெளிவாக விளங்கும்.



பரப்பளவு $=$ நீளம் $\times$ அகலம்

$$= (x + 5) \times x$$

$$x (x + 5) = 150$$

இது தேவையான சமன்பாடாகும்.

(iii) மேற்குறித்த சமன்பாட்டைத் தீர்ப்போம்.

$$x (x + 5) = 150$$

$$x^2 + 5x - 150 = 0$$

$$(x - 10) (x + 15) = 0$$

$\therefore \quad x - 10 = 0$ அல்லது $x + 15 = 0$

$x = +10$ அல்லது $x = -15$

$\therefore \quad x = +10$, $x = -15$ ஆகியன இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.
ஆயினும் x இன் மூலம் ஒரு நீளத்தை குறிப்பிடுவதால் அது மறையாக இருக்க முடியாது.

எனவே $x = 10$ என்னும் பெறுமானம் மட்டும் பொருந்தும்
இதற்கேற்ப, செவ்வகத்தின் அகலம் =10 m உம்
செவ்வகத்தின் நீளம் =15m உம் ஆகும்.

மேலே x இற்குப் பெறப்பட்ட இரண்டு பெறுமானங்களையும் பிரதியிட்டு $x(x + 5) =150$ இன் தீர்வுகள் 10, –15 என உறுதிப்படுத்தலாம்.

இ.கை.ப. $= x (x + 5)$

$$= 10 (10 + 5)$$

$$= 10 \times 15$$

$$= 150$$

இ.கை.ப. = வ.கை.ப.

இவ்வாறே, $x = -15$ ஐயும் ஒரு தீர்வென உறுதிப்படுத்தலாம்.

பயிற்சி 13.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் இருபடிச் சமன்பாட்டையும் தீர்க்க.

(a) $x(x+5)=0$ **(b)** $\frac{3}{4}x(x+1)=0$ **(c)** $(x-4)(x+3)=0$

(d) $x^2-2x=0$ **(e)** $\frac{x^2}{2}=3x$ **(f)** $x^2+7x+12=0$

(g) $(x-2)(2x+3)=x^2+2x+4$ **(h)** $\frac{4}{x}+\frac{3}{x+1}=3$

(i) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1$ **(j)** $x^2-4=0$

2. காரணி அறிவைக் கொண்டு கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் இருபடிச் சமன்பாட்டையும் தீர்க்க.
($\sqrt{2}=1.41, \sqrt{3}=1.73, \sqrt{5}=2.23$)

(a) $x^2-12=0$ **(b)** $x^2-21=11$ **(c)** $x^2+17=37$

3. யாதேனும் ஓர் எண்ணின் வர்க்கத்திலிருந்து அவ்வெண்ணின் இரண்டு மடங்கைக் கழிக்கும்போது விடையாக 15 பெறப்படும். அவ்வெண்ணைக் காண்க.

4. அடுத்துள்ள இரண்டு இரட்டை எண்களின் பெருக்கம் 120 ஆகும். இரண்டு எண்களையும் காண்க

5. செவ்வக வடிவிலான ஓர் அடரின் நீளம் அதன் அகலத்திலும் 3 சென்ரிமீற்றரினால் கூடியதாகும். இவ்வடரின் பரப்பளவு 88 சதுர சென்ரி மீற்றர்களாகும். அடரின் நீளம், அகலம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. செவ்வக வடிவிலான ஒரு புற்றரையின் நீளம் 32m உம் அகலம் 20m உம் ஆவதுடன் அதனைச் சுற்றி வெளியே சீரான அகலத்தையுடைய ஒரு பாதையும் உண்டு. பாதையின் பரப்பளவு 285m^2 ஆகும்.

(i) பாதையின் அகலத்தை x m எனக் கொண்டு தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து xஇலான ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

(ii) அச்சமன்பாட்டைத் தீர்த்து பாதையின் அகலத்தைக் காண்க.

7. ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கத்தின் நீளம் $(2x+1)$ சென்ரிமீற்றர் ஆகும். மற்றைய இரண்டு பக்கங்களினதும் நீளங்கள் முறையே x சென்ரிமீற்றர் $(x+7)$ சென்ரி மீற்றர் ஆகும். xஇன் பெறுமானத்தைக் கண்டு முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

8. $-7, -5, -3, -1, \ldots$ என்னும் கூட்டல் விருத்தியில் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 105 ஆகும். விருத்தி தொடர்பான அறிவைப் பயன்படுத்தி,

(i) n இலான ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

(ii) மேற்குறித்த சமன்பாட்டைத் தீர்த்து உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

13.3 வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது உரிய கோவையைக் காரணிப்படுத்தித் தீர்வுகளைக் காணும் முறை பற்றி அறிந்தோம். ஆயினும் $x^2 + 3x + 5 = 0$, $2x^2 - 5x - 1 = 0$ போன்ற இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் காரணிப்படுத்தித் தீர்த்தல் இலகுவானதல்ல. அவ்வாறான சமன்பாடுகளில் மூலங்களைப் பெற்றுக் கொள்வதற்காக வேறொரு முறையைப் பயன்படுத்துவது இலகுவானதாகும். கோவையை ஒரு நிறைவர்க்கமாக மாற்றித் தீர்த்தல் ஒரு முறையாகும். இது வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல் எனப்படும். வர்க்கப்பூர்த்தியாக்கல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்கு முன்னர் $x^2 + bx$ என்ற ஒரு கோவையை நிறைவர்க்கமாக்குவதைக் கற்ற முறையை நினைவில் கொண்டு வருவோம். அதற்காக, கீழே தரப்பட்டுள்ள செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு

கீழே தரப்பட்டுள்ள கோவைகளை நிறைவர்க்கமாக மாற்றுவதற்கு கூட்டப்பட வேண்டிய மாறா உறுப்பை எழுதி அவற்றை நிறைவர்க்கங்களாக ஒழுங்கமைக்க. (முதலாவது பகுதி செய்யப்பட்டுள்ளது)

a. $x^2 + 6x + 9 \;= (x + 3)^2$

b. $x^2 + 8x + ... \;=$ ....

c. $x^2 - 14x + ... =$ ....

d. $x^2 + 3x + ... \;=$ ....

e. $(x + ...)^2 = x^2 + 8x + ...$

f. $(x + ...)^2 = x^2 + 2ax + ...$

g. $(x + b)^2 = x^2 + ...x + b^2$

h. $(x + m)^2 = x^2 + ...x + m^2$

முதலில் காரணிகளைப் பயன்படுத்தியும் தீர்க்கக் கூடிய ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல் மூலம் தீர்க்கும் முறையைக் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 1

$x^2 + 2x - 3 = 0$ என்பதை வர்க்கப்பூர்த்தியாக்கல் மூலம் தீர்க்க.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x^2 + 2x = 3$$

இடது கைப்பக்கத்தை நிறைவர்க்கமாக எழுதுவதற்காக x இன் குணகத்தின் அரைமடங்கின் வர்க்கமாகிய $+1$ ஐக் கூட்டுவோம். அப்போது வலது கைப்பக்கமும் $+1$ ஐக் கூட்ட வேண்டும்.

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1$$
$$(x + 1)^2 = 4$$

இனி, இரு பக்கமும் வர்க்கமூலத்தைக் காண்போம்.

$$x + 1 = \pm\sqrt{4}$$
$$x + 1 = \pm 2$$
$$x = \pm 2 - 1$$

அதாவது, $x = +2 - 1$ அல்லது $x = -2 - 1$

$x = 1$ அல்லது $x = -3$

இதற்கேற்ப, மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $x = 1$, $x = -3$ ஆகும்.
இனி, இன்னோர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

உதாரணம் 2

$x^2 - 4x + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை வர்க்கப்பூர்த்தியாக்கல் மூலம் தீர்க்க.

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$x^2 - 4x = -1$$
$$x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$$
$$(x - 2)^2 = 3$$
$$x - 2 = \pm\sqrt{3}$$ (இருபக்கமும் வர்க்கமூலம் காண்பதால்)
$$x = 2 \pm\sqrt{3}$$
$x = 2 + \sqrt{3}$ அல்லது $x = 2 - \sqrt{3}$ ஆகும்.

$\sqrt{3}$ இற்கான கிட்டிய பெறுமானமாக 1.73 தரப்பட்டுள்ளது எனக் கொள்வோம்.

$x = 2 + 1.73$ அல்லது $x = 2 - 1.73$ ஆக வேண்டும்.

$x = 3.73$ அல்லது $x = 0.27$

$x = 3.73$, $x = 0.27$ என்பன சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

உதாரணம் 3

தீர்க்க. $2x^2 + 6x - 5 = 0$

இச்சமன்பாட்டை நிறை வர்க்கமாக எழுதுவதற்கு x இன் குணகத்தை 1 என அமைத்துக் கொள்வது மிக இலகுவானதாகும். சமன்பாட்டை 2 ஆல் வகுப்பதால் வர்க்க உறுப்பின் குணகத்தை 1 என மாற்றி அமைத்துக்கொள்ளலாம்.

$$2x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$x^2 + 3x + \frac{5}{2} = 0$$
$$x^2 + 3x = \frac{5}{2}$$
$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{4}$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{+10 + 9}{4}$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{+19}{4}$$
$$x + \frac{3}{2} = \frac{\pm\sqrt{19}}{2}$$
$x = \frac{+\sqrt{19} - 3}{2}$ அல்லது $x = \frac{-\sqrt{19} - 3}{2}$

$\sqrt{19}$ இற்கான கிட்டிய பெறுமானமாக 4.36 தரப்பட்டுள்ளது எனக் கொள்வோம்.

$$x = \frac{4.36 - 3}{2} \text{ அல்லது } x = \frac{-4.36 - 3}{2}$$

$x = -0.68$ அல்லது $x = -3.68$

$x = 0.68$, $x = -3.68$ என்பன சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

பயிற்சி 13.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாடுகளை வர்க்கப்பூர்த்தியாக்கல் மூலம் தீர்க்க. ($\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$, $\sqrt{5} = 2.23$, $\sqrt{6} = 2.44$, $\sqrt{13} = 3.6$, $\sqrt{17} = 4.12$, $\sqrt{57} = 7.54$ எனக் கொள்க)

(a) $x^2 - 2x - 4 = 0$ **(b)** $x^2 + 8x - 2 = 0$ **(c)** $x^2 - 6x = 4$

(d) $x^2 + 4x - 8 = 0$ **(e)** $x(x + 8) = 8$ **(f)** $x^2 + x = 4$

(g) $2x^2 + 5x = 4$ **(h)** $3x^2 = 3x + \frac{1}{2}$ **(i)** $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{2x+3} = 1$

13.4 சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

$ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் வடிவிலான ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கான மிக இலகுவான முறை சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவதாகும். முதலில் மூலங்கள் தரப்படுகின்ற சூத்திரத்தைப் பெற்றுக்கொள்ளும் முறை பற்றிக் கவனிப்போம். உண்மையில் இங்கு நடைபெறுவது, சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$ என்பதை வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல் மூலம் தீர்ப்பதாகும்.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \quad (a \text{ ஆல் வகுப்பதால்})$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

(இருபக்கமும் $\frac{b}{a}$ இன் அரை மடங்கின் வர்க்கத்தைக் கூட்டுவதன் மூலம்)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

(இடது கைப்பக்கத்தை நிறைவர்க்கமாக எழுதி வலது கைப்பக்க உறுப்பை ஒழுங்கமைப்பதன் மூலம்)

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$ (வலது கைப்பக்கத்தை பொதுப் பகுதி எண்ணுடன் எழுதுவதால்)

எனவே, $$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a^2}}$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ (பொதுப் பகுதி எண்ணுடன் எழுதுவதால்)

இதற்கேற்ப,

$ax^2+bx+c=0$ என்னும் வடிவிலான இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கு

$$\boxed{x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

இங்கு நேர், மறைப் பெறுமானங்கள் இரண்டிற்கும் ஒத்த x இன் இரண்டு பெறுமானங்கள் (மூலங்கள்) கிடைக்கும்.

இங்கு a என்பது உறுப்பு x^2 இன் குணகமும் b என்பது உறுப்பு x இன் குணகமும், c என்பது மாறா உறுப்பும் ஆகும்.

உதாரணம் 1

$2x^2+7x+3=0$ என்னும் சமன்பாட்டைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

$2x^2+7x+3=0$ என்னும் சமன்பாட்டில்

$a=2, b=7, c=3$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times2\times3}}{2\times2}$$

$$= \frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{4}$$

$$= \frac{-7\pm\sqrt{25}}{4}$$

$$= \frac{-7\pm 5}{4}$$

$x = \dfrac{-7+5}{4}$ அல்லது $x = \dfrac{-7-5}{4}$

$x = -\frac{1}{2}$ அல்லது $x = -3$

$x = -\frac{1}{2}$, $x = -3$ என்பன மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

உதாரணம் 2

$4x^2 - 7x + 2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க. $\sqrt{17} = 4.12$ எனக் கொள்க.

$$4x^2 - 7x + 2 = 0$$

இங்கு $a = 4$, $b = -7$, $c = 2$ எனக் கொள்ளலாம். ($ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின்படி)

இதற்கேற்ப, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 4 \times 2}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{8}$$

$= \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$ ($\sqrt{17} = 4.12$ எனத் தரப்பட்டுள்ளதால்)

$$= \frac{7 \pm 4.12}{8}$$

$x = \frac{7 + 4.12}{8}$ அல்லது $x = \frac{7 - 4.12}{8}$

$x = \frac{11.12}{8}$ அல்லது $x = \frac{2.88}{8}$

$x = 1.39$ அல்லது $x = 0.36$

$x = 1.39$, $x = 0.36$ என்பன மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

உதாரணம் 3

$x^2 + 2x - 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்த்து, விடையை இரண்டாம் தசமதானத்துக்குத் திருத்தமாகக் காண்க. ($\sqrt{2} = 1.414$ எனக் கொள்க).

$a = 1, b = 2, c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$$

$$= -\frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 2}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2 \times 1.414}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2.828}{2}$$

$x = \frac{-2 + 2.828}{2}$ அல்லது $x = \frac{-2 - 2.828}{2}$

$= \frac{0.828}{2}$ $\quad x = \frac{-4.828}{2}$

$x = 0.414$ அல்லது $x = -2.414$

$x = 0.41$, $x = -2.41$ என்பன மேலேயுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

பயிற்சி 13.4

1. சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கீழே தரப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து, விடைகளைக் கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்திற்குத் தருக.

($\sqrt{3} = 1.73$, $\sqrt{17} = 4.12$, $\sqrt{29} = 5.38$ எனக் கொள்க).

(a) $x^2 - 6x - 3 = 0$ **(b)** $x^2 - 7x + 5 = 0$ **(c)** $2x^2 - x - 2 = 0$
(d) $2x^2 - 5x + 1 = 0$ **(e)** $3x^2 - 4x - 7 = 0$

பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு நேர் எண்ணின் வர்க்கத்திலிருந்து அவ்வெண்ணின் மூன்று மடங்கைக் கழிக்கும்போது 28 கிடைக்கும். அவ்வெண்ணைக் காண்க.

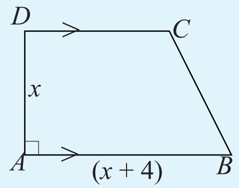
2. அடுத்துள்ள இரண்டு ஒற்றை எண்களின் பெருக்கம் 99 ஆகும். இரண்டு எண்களையும் காண்க.

3. ஒரு செவ்வக வடிவிலான தகட்டுத்துண்டின் நீளம் அதன் அகலத்திலும் 6cm கூடியதாகும். தகட்டின் பரப்பளவு 44 cm^2 ஆகும். அகலத்தை x cm எனக் கொண்டு

(i) தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து x இலான ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

(ii) சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி அச்சமன்பாட்டைத் தீர்த்து xஇன் பெறுமானங்களைக் கிட்டிய முதலாம் தசமதானத்துக்குத் தருக.
($\sqrt{53} = 7.28$ எனக் கொள்க).

4. $ABCD$ ஒரு சரிவகமாகும் இதில் $AD = CD$ ஆகும்.



(i) சரிவகத்தின் பரப்பளவு 12cm^2 ஆயின் $x^2 + 2x - 12 = 0$ இன் மூலம் x இன் பெறுமானங்கள் தரப்படுகின்றன எனக் காட்டுக.

(ii) வர்க்கப்பூர்த்தியாக்கல் மூலம் அல்லது வேறொரு முறையில் மேலே (i) இன் இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து x இன் பெறுமானத்தைக் கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்துக்கு காண்க.

5. அடுத்துள்ள மூன்று இயற்கை எண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 149 ஆகும். இம்மூன்று எண்களிலும் நடு எண் x எனக் கொண்டு ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை உருவாக்கி அதனைத் தீர்த்து, அதிலிருந்து பெரிய எண்ணைக் காண்க.

6. ஒரு செங்கோண முக்கோணியில் செங்கோணத்தை அமைக்கும் இரண்டு பக்கங்களினதும் நீளங்கள் $5x$ சென்ரிமீற்றர், $(3x - 1)$ சென்ரிமீற்றர் ஆகும். இதன் பரப்பளவு 60 cm^2 ஆயின் x இலான ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை உருவாக்கி அதனைத் தீர்த்து அதிலிருந்து முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

7. ஒரு மனிதன் ரூ. 600 இற்கு ஒரு தொகை மாம்பழங்களை வாங்கினான். ஒரு மாம்பழத்தின் விலை ஒரு ரூபாயினால் குறைந்திருப்பின் அவன் மேலும் 20 மாம்பழங்களை அதிகமாக வாங்கியிருக்கலாம். வாங்கிய மாம்பழங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

14 இயல்பொத்த முக்கோணிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- "ஒரு முக்கோணியின் பக்கமொன்றுக்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படும் ஒரு கோட்டினால் எஞ்சிய இரு பக்கங்களும் விகித சமனாகப் பிரிபடும்" என்னும் தேற்றத்தை அறிந்து கொள்ளவும்
- "ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு பக்கங்கள் நேர்கோடொன்றின் மூலம் விகித சமனாகப் பிரிக்கப்படுமாயின் அந்நேர்கோடானது எஞ்சிய பக்கத்திற்கு சமாந்தரமாகும்" என்னும் மறுதலைத் தேற்றத்தை அறிந்து கொள்ளவும்
- இயல்பொத்த உருவங்கள் என்பதன் கருத்தை விளங்கிக் கொள்வதற்கும்
- "இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமனாகும்" என்னும் தேற்றத்தை அறிந்து கொள்வதற்கும்.
- "இரண்டு முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமனாயின் அம்முக்கேணிகள் இரண்டும் இயல்பொத்தவை" என்னும் மறுதலைத் தேற்றத்தை அறிந்து கொள்வதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

பக்கங்களுக்கு இடையிலான விகிதம்



$AC = 2$ cm, $CB = 3$ cm ஆகுமாறு AB இன்மீது C ஆனது அமைந்துள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டம் AB உருவில் தரப்பட்டுள்ளது. C இனால் நேர்கோட்டுத் துண்டம் AB ஆனது AC, CB என இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

அப்போது AC, CB என்பவற்றுக்கிடையிலுள்ள விகிதத்தை அவற்றின் நீளங்களிலிருந்து பெறலாம்.

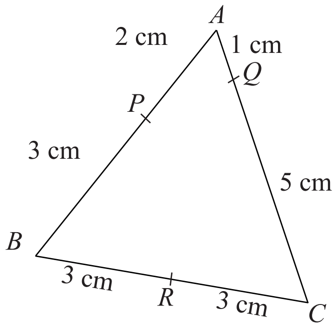
$AC : CB = 2 : 3$

இவ்வாறே $AC : AB = 2 : 5$ ($AB = 5$ cm என்பதால்) எனவும்

$CB : AC = 3 : 2$ எனவும்

$CB : AB = 3 : 5$ உம் எனவும் எழுதலாம்.

விகிதத்துக்காகத் தொடர்புபடுத்திக் கொள்ளும் பக்கங்களின் ஒழுங்கிலேயே அவற்றின் நீளங்களுக்கிடையிலான விகிதத்தையும் எழுதலாம். கீழே உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC ஐக் கருதுக.



உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC இல் ஒவ்வொரு பக்கத்தின் மீதும் அங்கு தரப்பட்டுள்ள முறையில் P, Q, R ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளபோது கீழே தரப்பட்டுள்ளவாறு விகிதங்களை எழுதலாம்.

(i) $AP : PB = 2 : 3$, $AP : AB = 2 : 5$, $PB : AP = 3 : 2$

(ii) $AQ : QC = 1 : 5$, $AQ : AC = 1 : 6$, $QC : AQ = 5 : 1$

(iii) $BR : RC = 3 : 3 = 1 : 1$, $BR : BC = 3 : 6 = 1 : 2$, $RC : BR = 3 : 3$

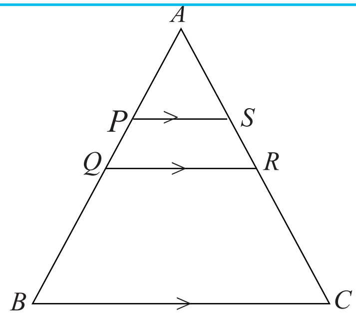
விகிதத்திலிருந்து பின்னத்தையும் எழுதமுடியுமென்பதை நாம் கற்றுள்ளோம். அதற்கேற்ப, $AQ : QC = 1 : 5$ என்பதை $\frac{AQ}{QC} = \frac{1}{5} = 0.2$ எனவும் எழுதலாம்.

14.1 ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு பக்கங்களை எஞ்சிய பக்கத்திற்கு சமாந்தரமாக வரையும் ஒரு கோட்டினால் பிரித்தல்

ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு பக்கங்களை வெட்டிச் செல்லுமாறு எஞ்சிய பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாக வரையும் கோட்டினால் அப்பக்கங்கள் இரண்டும் பிரிபடும் விகிதங்கள் பற்றி ஆராய்வதற்காகப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு

- $AB = 6$ cm ஆகவும் எஞ்சிய இரு பக்கங்களும் எந்தவொரு நீளமாகவும் இருக்குமாறு ஒரு முக்கோணியை வரைக.
- $AP = 2$ cm, $AQ = 3$ cm ஆகுமாறு AB யின் மீது P, Q ஆகிய இரண்டு புள்ளிக ளைக் குறிக்க.
- மூலைமட்டத்தைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு முறையில் Q வின் ஊடாக BC யிற்குச் சமாந்தரமாகக் கோடொன்றை வரைந்து அது கோடு AC ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியை R எனப் பெயரிடுக.



- AR, RC ஆகியவற்றை அளந்து கொள்க.
- BC இற்குச் சமாந்தரமாக P இனூடாக மேலுமொரு கோட்டை வரைந்து அது கோடு AC யைச் சந்திக்கும் புள்ளியை S எனப் பெயரிடுக.
- AS, SC ஆகியவற்றை அளந்து கொள்க.
- தற்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

சந்தர்ப்பம்	பக்கம் AB யின் பகுதிகளுக்கிடையிலான விகிதம்	பக்கம் AC யின் பகுதிகளுக்கிடையிலான விகிதம்	இரண்டு விகிங்களுக்கிடையிலான தொடர்பு
Q இனூடாக சமாந்தரக் கோடு	$\frac{AQ}{QB} = \frac{3}{3} = 1$	$\frac{AR}{RC} =$	
P இனூடாக சமாந்தரக் கோடு	$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{4} = 0.5$	$\frac{AS}{SC} =$	

- இவ்வாறு செங்கோண முக்கோணி, விரிகோண முக்கோணி என்பவற்றிலும் ஒரு பக்கத்திற்கு சமாந்தரமாக வரையும் ஒரு கோட்டினால் எஞ்சிய இரண்டு பக்கங்களும் பிரிபடும் விகிதங்களுக்கிடையிலான தொடர்பைப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

உங்களுக்குக் கிடைத்த விடைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ள வாக்கியத்துடன் பொருந்துகின்றனவா எனப் பார்க்க.

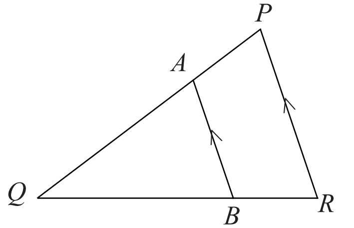
ஒரு முக்கோணியில் ஒரு பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாக வரையும் கோட்டினால் எஞ்சிய இரு பக்கங்களும் விகிதசமனாகவே பிரிபடும்.

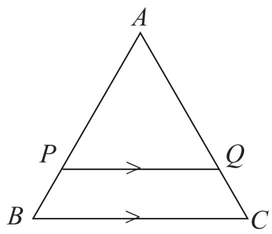
மேலே பெற்றுக் கொண்ட முடிபை ஒரு கேத்திரகணிதத் தேற்றமாக இவ்வாறு குறிப்பிடலாம்.

தேற்றம்
ஒரு முக்கோணியில் ஒரு பக்கத்திற்கு சமாந்தரமாக வரையும் கோட்டினால் எஞ்சிய இரண்டு பக்கங்களும் விகிதசமனாகப் பிரிபடும்.

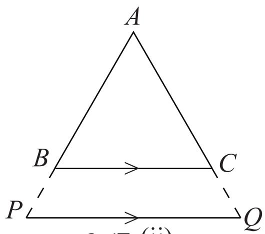
உதாரணமாக உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி PQR இல் பக்கம் PR இற்குச் சமாந்தரமாக AB வரையப்பட்டுள்ளது.
எனவே தேற்றத்தின் படி

(i) $QA : AP = QB : BR$ அதாவது, $\frac{QA}{AP} = \frac{QB}{BR}$ ஆகும்.

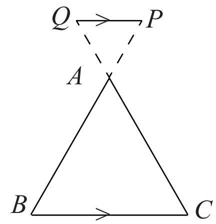




உரு (i)



உரு (ii)



உரு (iii)

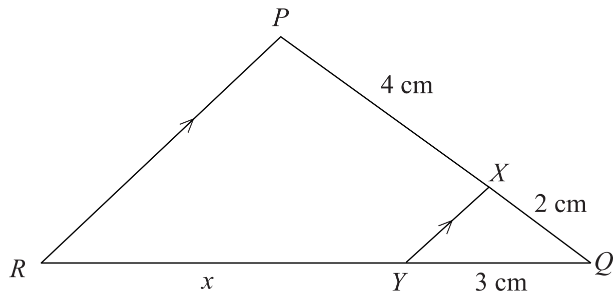
மேலே தரப்பட்டுள்ள மூன்று உருக்களையும் அவதானிக்க அவற்றில் உரு (i) இல் AB, AC ஆகிய பக்கங்கள் அகமாகப் பிரிக்கப்படுமாறு BC இற்குச் சமாந்தரமாக PQ வரையப்பட்டுள்ளது. ஆயினும் உரு (ii), (iii) ஆகியவற்றில் BC இற்குச் சமாந்தரமான கோடு PQ ஆனது நீட்டப்பட்ட பக்கங்களைச் சந்திக்கின்றது. இவ்வாறான சந்தர்ப்பங்களில் PQ இன் மூலம் AB, AC ஆகிய பக்கங்கள் புறமாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன எனக் கூறப்படும். இவ்வாறு பக்கங்கள் புறமாக அல்லது அகமாக பிரிக்கப்படினும் மேற்குறித்த தேற்றம் செல்லுபடியாகும். அதாவது,

மேலே உள்ள மூன்று உருவங்களிலும் $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ ஆகும்.

இனி இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி செய்யப்பட்ட கணித்தல்களை உள்ளடக்கிய பின்வரும் உதாரணத்தைப் பார்க்க.

உதாரணம் 1

முக்கோணி PQR இல் பக்கம் PR இற்குச் சமாந்தரமாக XY வரையப்பட்டுள்ளது. $PX = 4$ cm, $XQ = 2$ cm, $YQ = 3$ cm ஆயின் RY யின் நீளத்தைக் காண்க.



RY இன் நீளத்தை x எனக் கொள்வோம்.
அப்போது PR இற்குச் சமாந்தரமாக XY வரையப்பட்டுள்ளதால்,

தேற்றத்தின் படி $\dfrac{RY}{YQ} = \dfrac{PX}{XQ}$

அதாவது $\dfrac{3}{x} = \dfrac{2}{4}$

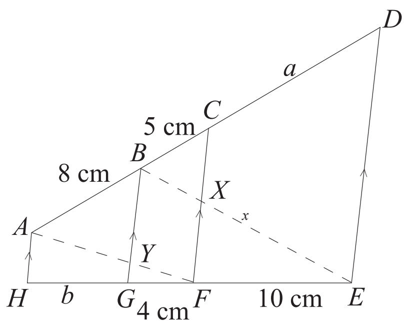
$\therefore \quad 2x = 4 \times 3$

$\therefore \quad x = 6$

$\therefore$ RY இன் நீளம் 6 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2

உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களின்படி a, b ஆகியவற்றின் மூலம் தரப்படும் பெறுமானங்களைக் காண்க.



முக்கோணி BED யில் $DE//CX$ என்பதால் தேற்றத்தின்படி CX இனால் BD, BE ஆகிய பக்கங்கள் விகித சமனாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன.

அதாவது, $\frac{BC}{CD} = \frac{BX}{XE}$

அதாவது, $\frac{5}{a} = \frac{BX}{XE}$ ——— ①

இனி முக்கோணி BGE யில் $BG//XF$ என்பதால் தேற்றத்தின்படி EB, EG ஆகிய பக்கங்கள் விகிதசமனாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன.

அதாவது, $\frac{BX}{XE} = \frac{GF}{FE}$

எனவே, $\frac{BX}{XE} = \frac{4}{10}$ ——— ②

①, ② ஆகிய இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{5}{a} = \frac{4}{10}$$

அதாவது, $4a = 50$

$$a = \frac{50}{4}$$

$$= 12.5 \text{ cm}$$

மேற்குறித்தவாறே AF ஐ இணைப்பதால்,

முக்கோணி ACF இல், $\frac{AB}{BC} = \frac{AY}{YF}$

$\frac{8}{5} = \frac{AY}{YF}$ ——— ③

முக்கோணி AHF இல், $\frac{AY}{YF} = \frac{HG}{GF}$

$\frac{AY}{YF} = \frac{b}{4}$ ——— ④

③, ④ ஆகிய இரண்டு சமன்பாடுகளிலுமிருந்தும்

$$\frac{b}{4} = \frac{8}{5}$$

$\therefore \quad 5b = 32$

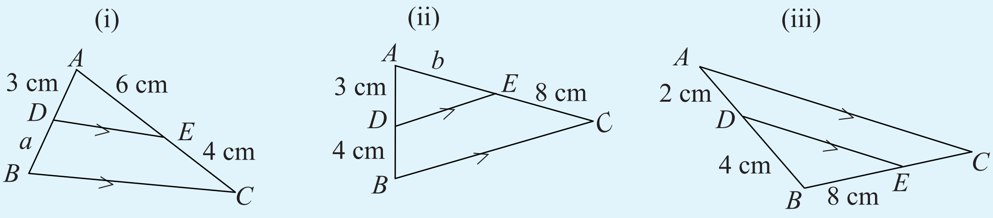
$$b = \frac{32}{5}$$

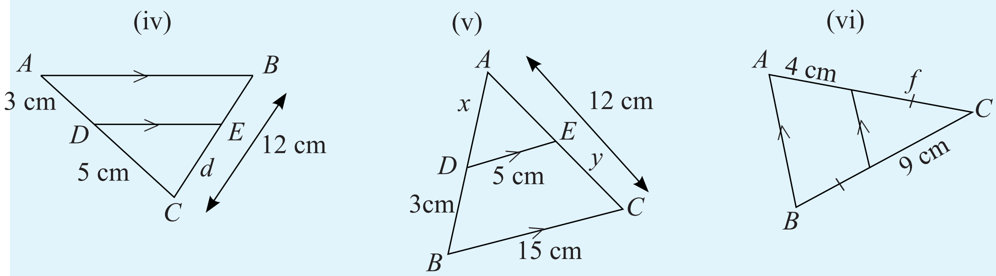
$$= 6.4 \text{ cm}$$

இனிக் கீழே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சிகளில் உள்ள கணித்தல்களில் ஈடுபட்டு கற்ற விடயங்களை உறுதிப்படுத்திக் கொள்ளுங்கள்.

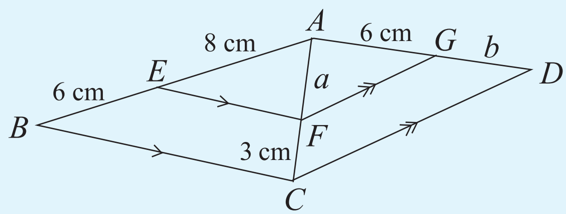
பயிற்சி 14.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் உருவிலும் சில நேர்கோட்டுத் துண்டங்களின் நீளங்கள் தெரியாக் கணியங்கள் மூலம் தரப்பட்டுள்ளன. அத்தெரியாக் கணியங்களால் குறிக்கப்படும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

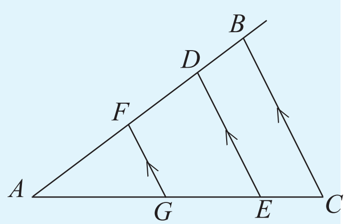




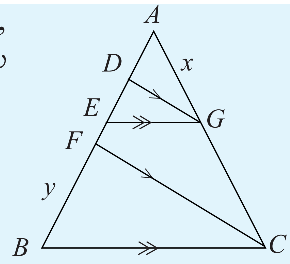
2. கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் a, b ஆகியவற்றினால் குறிக்கப்படும் பெறுமானங்களைக் காண்க.



3. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $FG//DE//BC$ ஆகும். $AF = 6$ cm, $DB = 3$ cm, $AG = 8$ cm, $GE = 8$ cm ஆகும். FD, EC ஆகிய நேர்கோட்டுத் துண்டங்களின் நீளங்களை வெவ்வேறாகக் காண்க.



4. உருவில் $DG//FC$, $EG//BC$ ஆகும். $AD = 6$ cm, $DE = 4$ cm, $EF = 5$ cm, $GC = 18$ cm ஆகும். x, y ஆகியவற்றினால் குறிக்கப்படும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

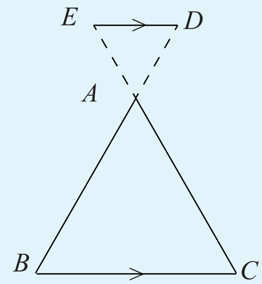


5. உருவில் முக்கோணி ABC யில் நீட்டப்பட்ட BA, CA ஆகியன BC யிற்கு சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு ED யினால் புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. $AE = 2$ cm, $AD = 3$ cm, $AC = 4$ cm ஆகும். கோட்டுத் துண்டம் AB யின் நீளம் x இனால் தரப்பட்டுள்ளது.

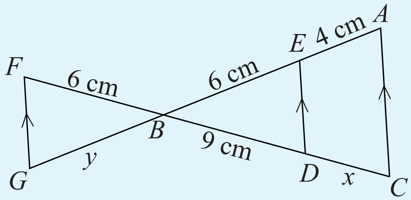
(i) கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

DB : .... = ... : EA

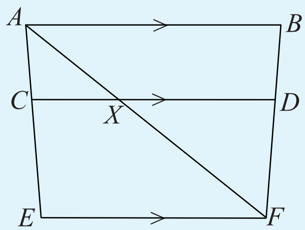
(ii) x இனால் தரப்படும் பெறுமானத்தைக் காண்க



6. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களின் படி x, y என்பவற்றின் மூலம் தரப்படும் பெறுமானங் களைக் காண்க.



7. உருவில் $AB//CD//EF$ ஆகும். $AC = 3$ cm, $CE = 5$ cm, $BF = 12$ cm ஆகும். BD, DF ஆகியவற்றின் பெறுமானங் களைக் காண்க.



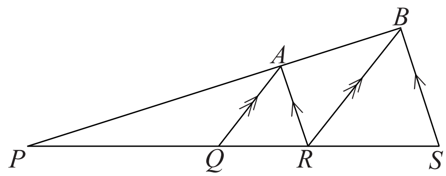
8. முக்கோணி ABC யில் $B\hat{C}A$ யின் இருசமகூறாக்கியானது பக்கம் AB ஐ X இல் சந்திக்கின்றது. $PX = PC$ ஆகுமாறு புள்ளி P ஆனது. BC இன் மீது அமைந்துள்ளது. $PX = 9$ cm, $BX = 5$ cm, $AX = 6$ cm ஆயின் பக்கம் BC இன் நீளத்தைக் காண்க.

14.2 ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு பக்கங்கள் விகிதசமனாகப் பிரிக்கப்படல் மேலும்

"ஒரு முக்கோணியில் பக்கமொன்றுக்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படும் கோட்டினால் எஞ்சிய இரண்டு பக்கங்களும் விகித சமனாகப் பிரிக்கப்படும்" என்னும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஏறிகளை நிறுவுதல் தொடர்பாக இப்பகுதியில் கலந்துரையாடுவோம்.

உதாரணம் 1

தரப்பட்டுள்ள உருவில் $PQRS$, PAB ஆகியன நேர்கோடுகளாகும்.
$BS//AR$, $BR//AQ$ ஆகும். $PQ : QR = PR : RS$ என நிறுவுக.



நிறுவல் : முக்கோணி PBR இல் பக்கம் BR ஆனது AQ இற்கு சமாந்தரமாவதால் தேற்றத்தின்படி

$PA : AB = PQ : QR$ ——— ①

முக்கோணி PBS இல் பக்கம் BS ஆனது AR இற்கு சமாந்தரமாவதால், தேற்றத்தின்படி

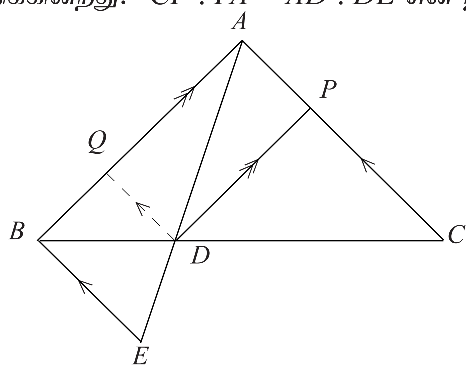
$PA : AB = PR : RS$ ——— ②

①, ② இலிருந்து

$PQ : QR = PR : RS$

உதாரணம் 2

D என்பது முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC இன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். நீட்டப்பட்ட கோடு AD யை E யில் சந்திக்குமாறு AC யிற்குச் சமாந்தரமாக BE வரையப்பட்டுள்ளது. AB யிற்குச் சமாந்தரமாக D யிலிருந்து வரையப்பட்ட கோடானது AC யை P யில் சந்திக்கின்றது. $CP : PA = AD : DE$ என நிறுவுக.



இங்கு முன்னைய உதாரணத்தைப் போன்றே ஒரு சோடி முக்கோணியையும் அவ்வொவ்வொரு அடிக்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோட்டையும் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். இதற்காக முக்கோணி ABE யையும் முக்கோணி ABC யையும் தெரிந்து கொள்வது இரண்டு முக்கோணிகளுக்கும் பொது அடியொன்று இருப்பதனாலேயே ஆகும்.

ஆயினும் முக்கோணி ABE யில் அடிக்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடு இல்லை. எனவே இவ்வாறான ஒரு கோட்டை முதலில் அமைத்துக் கொள்வோம்.

அமைப்பு : பக்கம் AB யை Q வில் சந்திக்குமாறு BE யிற்கு சமாந்தரமாக DQ வை வரைவோம். (இப்போது AC, QD, BE ஆகிய கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமானவை ஆகும்)

நிறுவல் :

முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AB இற்கு PD சமாந்தரம் என்பதால் தேற்றத்தின் படி

$$CP : PA = CD : DB \quad \text{——} ①$$

முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AC இற்கு QD சமாந்தரம் என்பதால் தேற்றத்தின் படி,

$$AQ : QB = CD : DB \quad \text{——} ②$$

முக்கோணி ABE யில் பக்கம் BE இற்கு QD சமாந்தரம் என்பதால் தேற்றத்தின் படி,

$$AQ : QB = AD : DE \quad \text{——} ③$$

①, ②, ③ ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து

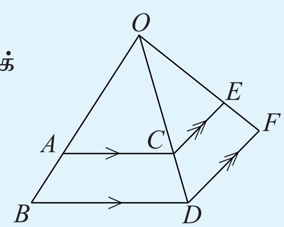
$CP : PA = CD : DB = AQ : QB = AD : DE$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad CP : PA = AD : DE$$

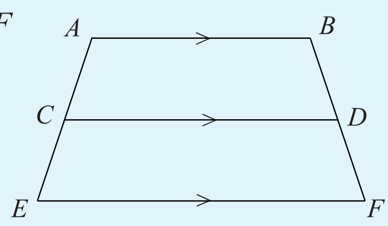
தற்போது பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

பயிற்சி 14.2

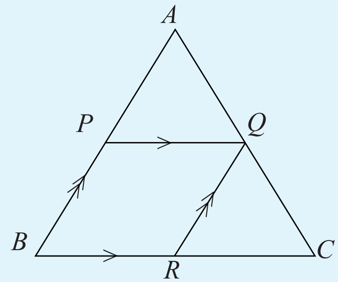
1. உருவில் உள்ள தகவல்களின்படி $OA : AB = OE : EF$ எனக் காட்டுக.



2. உருவிலுள்ள தகவல்களின் படி $AC : CE = BD : DF$ என நிறுவுக.

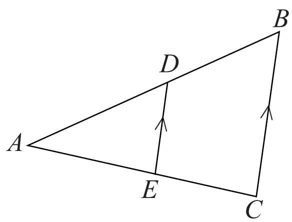


3. உருவிலுள்ள தகவல்களின்படி $AP : PB = BR : RC$ என நிறுவுக.



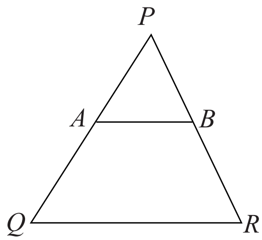
4. முக்கோணி PQR இல் பக்கம் QR இன் மீது புள்ளி A அமைந்துள்ளது. PR இற்குச் சமாந்தரமாக A இனூடாக வரையப்பட்ட கோடு பக்கம் PQ வை B இல் சந்திக்கின்றது. கோடு AB யை C யிலும் கோடு PQ வை D யிலும் வெட்டிச் செல்லுமாறு R இல் இருந்து கோடு RCD வரையப்பட்டுள்ளது.
$D\hat{B}C = B\hat{C}D$ ஆயின், $\dfrac{QA}{AR} = \dfrac{QB}{CR}$ என நிறுவுக.

14.3 ஒரு முக்கோணியில் எந்தவொரு பக்கத்திற்கும் சமாந்தரமாக வரையப்படும் கோட்டினால் எஞ்சிய பக்கங்கள் விகிதசமனாகப் பிரிக்கப்படுவது தொடர்பான தேற்றத்தின் மறுதலை



முக்கோணி ABC யில், பக்கம் BC இற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படும் கோடு DE இனால் AB, AC ஆகிய பக்கங்கள் விகிதசமனாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன என மேற்குறித்த தேற்றத்தில் முடிவு செய்யப்படுகின்றது.

அதாவது $BC//DE$ என்பதால் $AD : DB = AE : EC$ ஆகும். இத்தேற்றத்தின் மறுதலையை உருவில் உள்ள முக்கோணி PQR இற்கேற்ப விளங்கிக் கொள்வோம்.



இங்கு PQ, PR ஆகிய இரண்டு பக்கங்களும் கோடு AB யினால் இடைவெட்டப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் வேறாக்கப்பட்ட பகுதிகளுக்கிடையிலான விகிதம் $PA : AQ$, $PB : BR$ ஆகும்.

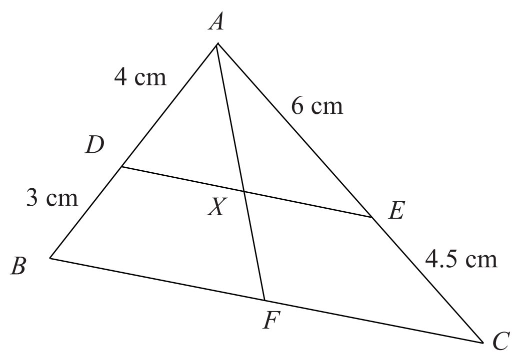
இந்த இரண்டு விகிதங்களும் சமனாகுமாயின் அதாவது $PA : AQ = PB : BR$ ஆகுமாயின் அப்போது இரண்டு பக்கங்களையும் இடைவெட்டும் கோடாகிய AB எஞ்சிய பக்கமாகிய QR இற்குச் சமாந்தரமாகும். இது இப்பாடத்தின் தொடக்கத்தில் கற்ற தேற்றத்தின் மறுதலையாகும். இப்பேறை இவ்வாறு ஒரு தேற்றமாக எழுதலாம்.

மேற்குறித்த தேற்றத்தின் மறுதலை

ஒரு நேர்கோடு முக்கோணியொன்றின் இரண்டு பக்கங்களை விகிதசமனாகப் பிரிக்குமாயின் அந்நேர்கோடு எஞ்சிய பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாகும்.

இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கணித்தல், ஏறிகளை நிறுவுதல் என்பன உட்பட்ட சில உதாரணங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

உதாரணம் 1



உருவிலுள்ள தகவல்களின் படி $AX : XF$ இன் பெறுமானம் காண்க.

முக்கோணி ABC ஐக் கருதும்போது $AD : DB = 4 : 3$ உம்

$AE : EC = 6 : 4.5 = 4 : 3$ உம் என்பதால்

$AD : DB = AE : EC$ ஆகும்.

$\therefore$ AB, AC ஆகிய கோடுகள், கோடு DE இனால் விகிதசமனாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன.

$\therefore$ தேற்றத்தின் மறுதலையின்படி $DE//BC$ ஆகும்.

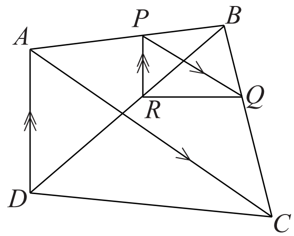
அப்போது முக்கோணி ABF இல் $DX//BF$ என்பதால்,

$AD : DB = AX : XF$

$AD : DB = 4 : 3$ என்பதால்,

$AX : XF = 4 : 3.$

உதாரணம் 2



புள்ளி P ஆனது நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் பக்கம் AB யின் மீது அமைந்துள்ளது. AC யிற்குச் சமாந்தரமாக P யினூடாக வரையப்பட்ட கோடு பக்கம் BC யை Q விலும் AD யிற்குச் சமாந்தரமாக P யினூடாக வரையப்பட்ட கோடு BD என்னும் கோட்டை R இலும் சந்திக்கின்றன. $RQ//DC$ என நிறுவுக.

நிறுவல் : முக்கோணி ABD யில் பக்கம் AD ஆனது PR இற்கு சமாந்தரம் என்பதால்

$BP : PA = BR : RD$ ——①

முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AC ஆனது PQ இற்கு சமாந்தரம் என்பதால்

$BP : PA = BQ : QC$ ——②

சமன்பாடுகள் ①, ② இலிருந்து

$BR : RD = BQ : QC$ எனப் பெறப்படும்.

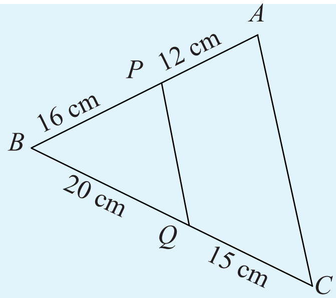
$\therefore$ முக்கோணி BDC யில் BD, BC ஆகிய பக்கங்கள் கோடு RQ இன் மூலம் விகித சமனாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன.

$\therefore$ $RQ//DC$ (மறுதலைத் தேற்றத்தின்படி)

மேலே தரப்பட்டுள்ள மறுதலைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

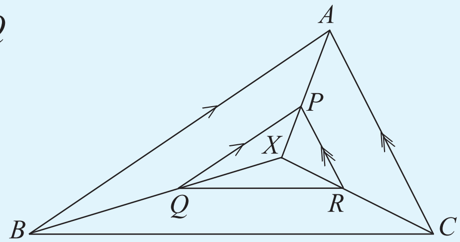
பயிற்சி 14.3

1. உருவிலுள்ள தகவல்களின்படி AC, PQ என்பவை சமாந்தரமானவை எனக் காட்டுக.

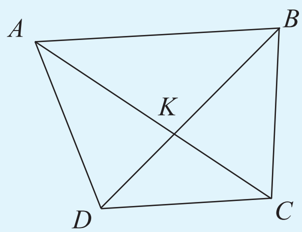


2. முக்கோணி ABC யில் $AP : PB = AQ : QC$ ஆகுமாறு பக்கம் AB யின் மீது புள்ளி P உம் பக்கம் AC இன் மீது புள்ளி Q உம் அமைந்துள்ளன. $Q\hat{P}B + P\hat{B}C = 180^\circ$ என நிறுவுக.

3. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $AC//PR$ உம் $AB//PQ$ உம் ஆகும். $BC//QR$ என நிறுவுக.

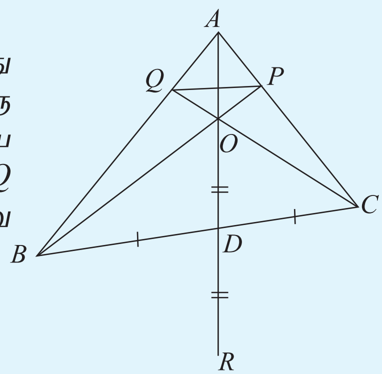


4. உருவிலுள்ள நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் AC, BD ஆகிய மூலை விட்டங்கள் K இல் இடைவெட்டுகின்றன. $AK = 4.8$ cm, $KC = 3.2$ cm, $BK = 3$ cm, $KD = 2$ cm ஆயின் DC ஆனது AB யிற்குச் சமாந்தரம் என நிறுவுக. (சாடை : முக்கோணி KDC யில் நீட்டப்பட்ட DK, CK ஆகியவற்றின் மீது முறையே A, B ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன எனக் கொள்க.)

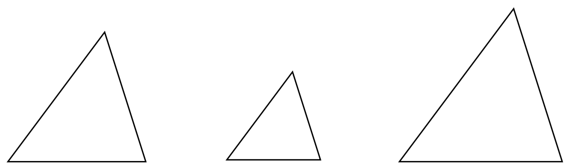


5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC யின் நடுப் புள்ளி D ஆகும். O என்பது AD யின் மீது அமைந்துள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளியாகும். நீட்டப்பட்ட BO ஆனது AC யை P யிலும் நீட்டப்பட்ட CO ஆனது AB யை Q விலும் இடைவெட்டுகின்றன. $OD = DR$ ஆகுமாறு பக்கம் AD ஆனது R வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது.

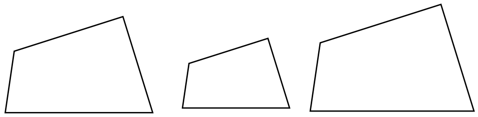
(i) $BRCO$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.
(ii) $AQ : QB = AO : OR$ என நிறுவுக.
(iii) $QP//BC$ என நிறுவுக.

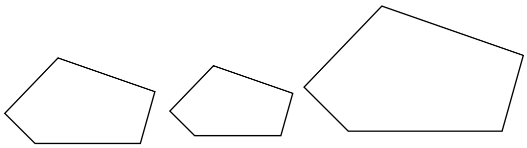


14.4 இயல்பொத்த உருவங்கள்

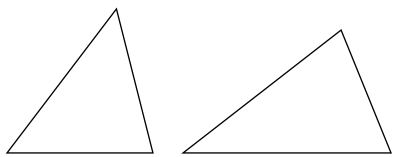


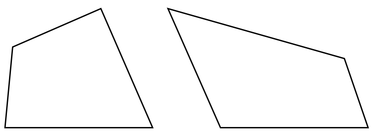
இம்மூன்று முக்கோணிகளும் ஒரே "வடிவிலான" முக்கோணிகள் என நாம் வழக்கமாக அறிமுகம் செய்வோம். கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் ஒரே வடிவிலான மூன்று நாற்பக்கல்களும் மூன்று ஐங்கோணிகளும் உள்ளன.





ஆயினும் கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணிச் சோடியைப் போன்றே நாற்பக்கற் சோடியையும் ஒரே வடிவில் இல்லாதிருப்பதைக் காண்பீர்கள்.

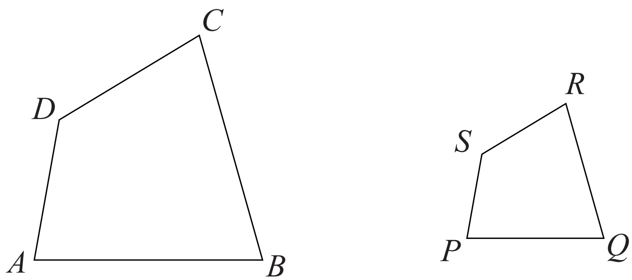




இங்கு "வடிவம் என்பதால் கருதப்படுவது யாது என்பதைப் பற்றி சிந்தித்தீர்களா? கணிதத்தில் அனைத்தையும் இயன்றவரை சரியாக வரைவிலக்கணப்படுத்த வேண்டும். எனவே "வடிவம்" என்பதற்குச் சரியான வரைவிலக்கணத்தை வழங்குவது அவசியமாகும். பொது வழக்கில் பயன்படுத்தும் "ஒரே வடிவம்" என்பதற்கு கணித்தில் பயன்படுத்தப்படும் சொல் "இயல்பொத்தது" என்பதாகும். இங்கு பல்கோணியின் இயல்பொத்த தன்மை பற்றி மாத்திரம் கவனத்தில் கொள்வோம். இரண்டு பல்கோணிகள் இயல்பொத்தவை எனக் கூறப்படுவது அப்பல்கோணிகள் இரண்டினதும்,

1. கோணங்கள் சமனாகவும்
2. ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமனாகவும் இருக்கும் போதேயாகும்.

உதாரணமாக கீழே தரப்பட்டுள்ள $ABCD$, $PQRS$ ஆகிய இரண்டு நாற்பக்கல்களையும் கருதுக.



இரண்டு நாற்பக்கல்களிலும்

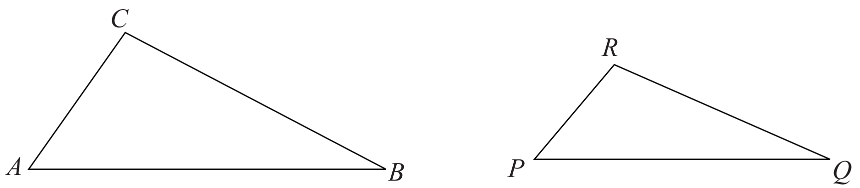
$\hat{A} = \hat{P}, \hat{B} = \hat{Q}, \hat{C} = \hat{R}, \hat{D} = \hat{S}$ ஆகவும்.

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP}$ ஆகவும் இருப்பின்

$ABCD$, $PQRS$ ஆகிய இரண்டு நாற்பக்கல்களும் இயல்பொத்தவை ஆகும். இப்பாடத்தில் இயல்பொத்த முக்கோணிகள் பற்றியே மேலும் கற்க இருக்கின்றோம். கீழே தரப்பட்டுள்ள ΔABC, ΔPQR ஆகியவற்றில்

$\hat{A} = \hat{P}, \hat{B} = \hat{Q}, \hat{C} = \hat{R}$ உம்

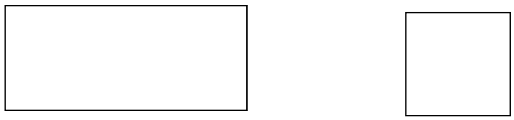
$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ உம் ஆயின் வரைவிலக்கணத்தின் படி அம்முக்கோணிகள் இரண்டும் இயல்பொத்தவை ஆகும்.



அவ்வாறிருப்பினும் முக்கோணிகளின் இயல்பொத்த தன்மை தொடர்பாக மிக முக்கியமான ஒரு பேறு உள்ளது. அதாவது இரண்டு முக்கோணிகளின் கோணங்கள் சமனாயின் அம்முக்கோணிகள் இரண்டும் இயல்பொத்தவை ஆகும். இதனை இன்னொரு விதமாக கூறுவதாயின் இரண்டு முக்கோணிகளின் கோணங்கள் சமனாயின் அப்போது அம்முக்கோணிகள் இரண்டினதும் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமனானவை ஆகும். இதற்கேற்ப இரண்டு முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை ஆவதற்கு அம்முக்கோணிகள் இரண்டினதும் கோணங்கள் சமனானவையா எனப் பரீட்சித்துப் பார்த்தல் போதுமானது.

உதாரணமாக மேலே தரப்பட்டுள்ள இரண்டு முக்கோணிகளினதும் $\hat{A} = \hat{P}, \hat{B} = \hat{Q}, \hat{C} = \hat{R}$ ஆயின் அப்போது $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ ஆகும்.

இப்பேறு முக்கோணி அல்லாத பல்கோணிகளுக்கு உண்மை ஆகாது. உதாரணமாக கீழே தரப்பட்டுள்ள இரண்டு நாற்பக்கல்களினதும் கோணங்கள் சமனானவை ஆகும். அவை யாவும் 90° வீதம் உள்ளவை. அவற்றில் ஒன்று செவ்வகமும் மற்றையது சதுரமும் ஆகும். எனவே அவற்றின் பக்கங்கள் விகிதசமானாக முடியாது. எனவே இரண்டு நாற்பக்கல்களும் இயல்பொத்தவை அல்ல.



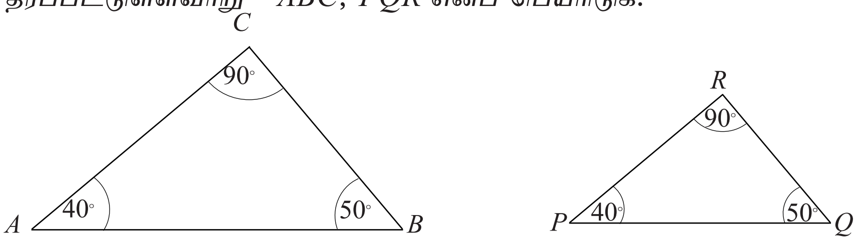
இரண்டு பல்கோணிகளின் கோணங்கள் சமனானவை ஆயின் அவை சமகோணமானவை எனப்படும். மேற்குறித்த கலந்துரையாடல்களுக்கேற்ப சமகோணமுடைய இரண்டு முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை ஆகும். இப்பெறுபேற்றை நிறுவுதலின்றி ஒரு தேற்றமாக நாம் பயன்படுத்துவோம்.

இயல்பொத்த முக்கோணித் தேற்றம்:
இரண்டு முக்கோணிகள் சமகோணமுடையவை ஆயின் அம்முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமமானவை ஆகும்.

இப்பேற்றை மிக நன்றாக விளங்கிக் கொள்வதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு

- பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி 40°, 50°, 90° கோணங்களைக் கொண்டு அளவில் ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்ட இரண்டு முக்கோணிகளை வரைக. அவற்றை கீழே தரப்பட்டுள்ளவாறு ABC, PQR எனப் பெயரிடுக.



- இரண்டு முக்கோணிகளினதும் ஒத்த பக்கங்களுக்கிடையிலான விகிதங்களைக் (பின்ன வடிவில்) காண்க. அதாவது $\frac{AB}{PQ}$, $\frac{BC}{QR}$, $\frac{CA}{RP}$ ஆகிய பெறுமானங்களை வெவ்வேறாகக் காண்க.
- மேற்குறித்த மூன்று பெறுமானங்களும் சமனானவையா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க. (அளவுகளில் ஏற்படும் வழுக்கள் காரணமாக உங்களுக்குக் கிடைக்கும் பெறுமானங்களில் சில வழுக்கள் இருக்கலாம்.)

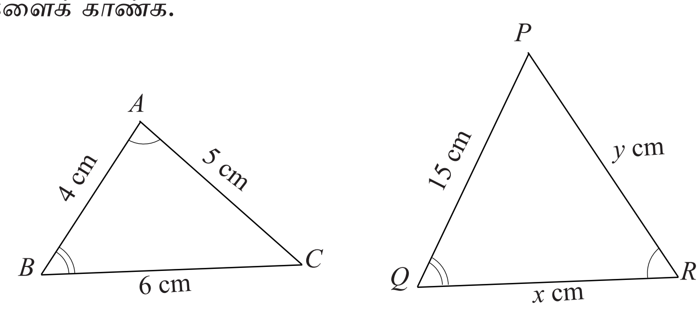
மேற்குறித்த செயற்பாட்டின்படி இரண்டு சமகோண முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமனாகின்றன என்பதை அதாவது இரண்டு முக்கோணிகளும் இயல்பொத்தவை என்பதை நீங்கள் புரிந்துகொண்டிருப்பீர்கள்.

குறிப்பு :

1. இரண்டு முக்கோணிகள் தொடர்பாக சமகோணமானவை, இயல்பொத்தவை ஆகிய இரண்டு சொற்களுக்கும் ஒரே கருத்து உண்டு.
2. ஒருங்கிசைவான இரண்டு முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை என்பது தெளிவாகும். ஆயினும் இயல்பொத்த இரண்டு முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைவனவாய் இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை.
3. ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு கோணங்கள் இன்னொரு முக்கோணியின் இரண்டு கோணங்களுக்கும் சமனாயின் எஞ்சிய கோணங்களும் சமனாகும். இதற்கான காரணம் எந்தவொரு முக்கோணியிலும் எல்லாக் கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை 180° ஆக இருப்பதுவே ஆகும். எனவே இரண்டு முக்கோணிகள் சமகோணமுடையவை ஆவதற்கு ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு கோணங்கள் மற்றைய முக்கோணியின் இரண்டு கோணங்களுக்குச் சமனாயிருபது போதுமானது.

உதாரணம் 1

உருவிலுள்ள ABC, PQR ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளில் $\hat{A} = \hat{R}$ உம் $\hat{B} = \hat{Q}$ உம் ஆகும். முக்கோணி PQR இல் x, y ஆகியவற்றின் மூலம் தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களைக் காண்க.



ABC, PQR ஆகிய முக்கோணிகளில்

$\hat{A} = \hat{R}$, $\hat{B} = \hat{Q}$

$\therefore \quad \hat{C} = \hat{P}$

(ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்)

$\therefore$ ABC, PQR ஆகியன இரண்டு இயல்பொத்த முக்கோணிகள் ஆகும்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமமானவை ஆகும்.

அப்போது; $\frac{BC}{PQ} = \frac{AB}{QR}$

$\therefore \quad \frac{6}{15} = \frac{4}{x}$

$6x = 15 \times 4$ (குறுக்குப் பெருக்கத்தால்)

$\therefore \quad x = \frac{15 \times 4}{6}$

$= 10 \text{ cm}$

$\frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{PR}$

$\frac{6}{15} = \frac{5}{y}$

$6y = 15 \times 5$

$y = \frac{15 \times 5}{6}$

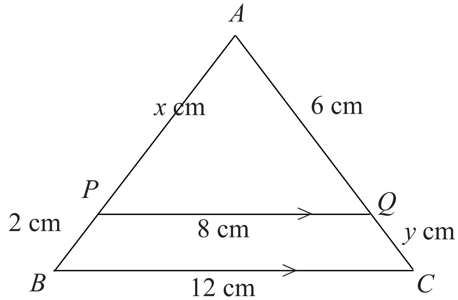
$= 12.5 \text{ cm}$

உதாரணம் 2

முக்கோணி ABC இல் பக்கம் BC யிற்கு சமாந்தரமாக PQ வரையப்பட்டுள்ளது.

(i) ABC, APQ ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை எனக் காட்டுக.

(ii) x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



(i) ABC, APQ ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளில்

$A\hat{B}C = A\hat{P}Q$ (ஒத்த கோணங்கள் $BC//PQ$)

$A\hat{C}B = A\hat{Q}P$ (ஒத்த கோணங்கள் $BC//PQ$)

$\hat{A}$ இரண்டு முக்கோணிகளுக்கும் பொதுவானது

$\therefore$ ABC, APQ ஆகியன இரண்டும் இயல்பொத்த முக்கோணிகளாகும்.

(ii) ABC, APQ ஆகிய இரண்டும் இயல்பொத்த முக்கோணிகள் என்பதால், தேற்றத்தின்படி ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமனானவை ஆகும்.

$\therefore \quad \frac{BC}{PQ} = \frac{AB}{AP}$

$\therefore \quad \frac{12}{8} = \frac{x+2}{x}$

$12x = 8(x+2)$

$12x = 8x + 16$

$12x - 8x = 16$

$4x = 16$

$\frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{AQ}$

$\frac{12}{8} = \frac{6+y}{y}$

$8(6+y) = 6 \times 12$

$48 + 8y = 72$

$8y = 72 - 48$

$8y = 24$

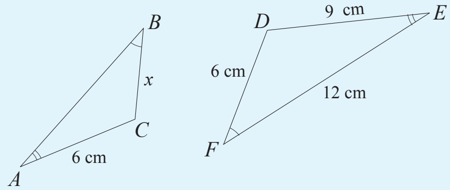
$y = 3 \text{ cm}$

$x \; = 4$ cm

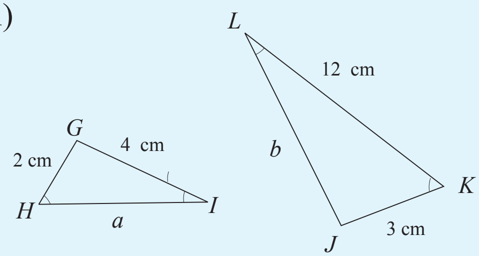
பயிற்சி 14.4

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு முக்கோணிச் சோடியிலும் தெரியாக் கணியத்தினால் தரப்பட்டுள்ள பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

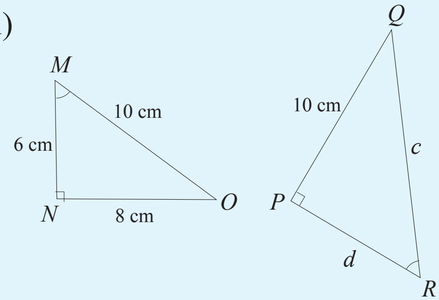
(i)



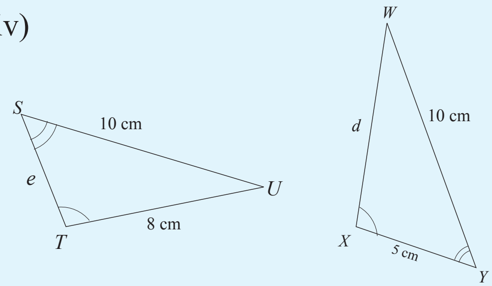
(ii)



(iii)

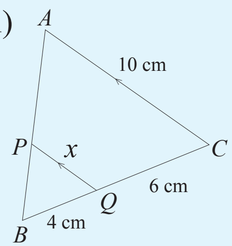


(iv)

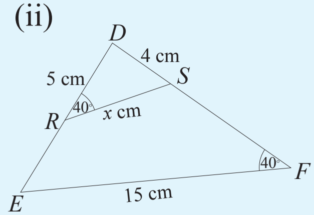


2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் உருவிலும் உள்ள முக்கோணிச் சோடிகளை இயல்பொத்தவை எனக் காட்டி அங்கு தெரியாக் கணியங்கள் மூலம் தரப்பட்டுள்ள பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

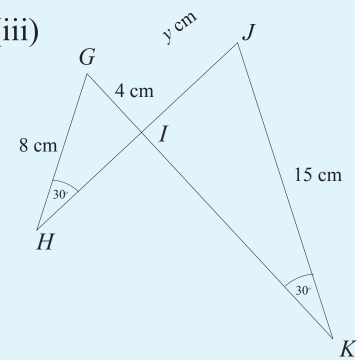
(i)



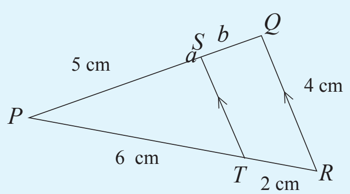
(ii)



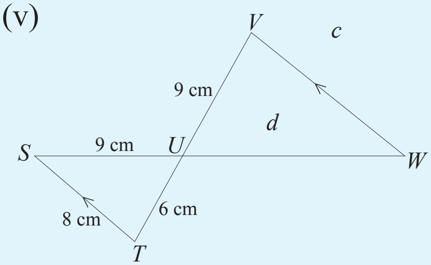
(iii)



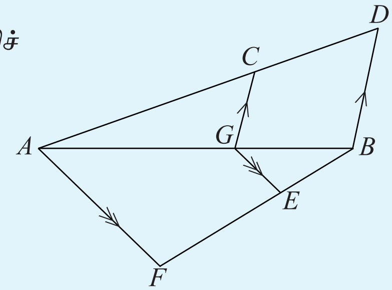
(iv)



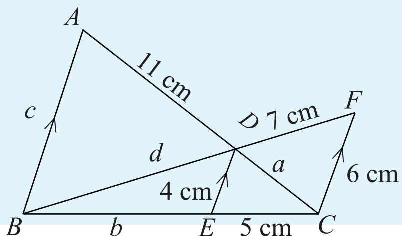
(v)



3. உருவிலுள்ள தகவல்களின்படி,
   (i) இரண்டு இயல்பொத்த முக்கோணிச் சோடிகளைப் பெயரிடுக.
   (ii) $BD = 9$ cm, $GC = 6$ cm, $AG = 12$ cm, $GE = 2$ cm ஆயின் GB, AF ஆகிய நீளங்களைக் காண்க.



4. உருவிலுள்ள தகவல்களின்படி,
   (i) மூன்று இயல்பொத்த முக்கோணிச் சோடிகளைப் பெயரிடுக.
   (ii) உருவில் a, b, c, d ஆகியவற்றின் மூலம் தரப்பட்டுள்ள நீளங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



நாம் இனி ஆராயவிருப்பது மேற்குறித்த தேற்றத்தின் மறுதலையைப் பற்றி ஆகும். அதாவது இரண்டு முக்கோணிகளில் பக்கங்கள் விகிதசமனானவை ஆயின் அம்முக்கோணிகள் இரண்டும் இயல்பொத்தவையாகுமா என்பதைப் பற்றி ஆகும். அம்மறுதலையும் உண்மையான ஒரு பெறுபேறாகும்.

மேலும்,
ஒரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களும் இன்னொரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களுக்கும் விகித சமனாயின் இரண்டு முக்கோணிகளும் இயல்பொத்தவை ஆகும்.

இப்பெறுபேற்றை மிகத் தெளிவாகப் விளங்கிக் கொள்வதற்காகக் கீழேயுள்ள செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு

- $AB = 2.5$ cm, $BC = 3$ cm, $AC = 3.5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC யை அமைக்க.
- $PQ = 5$ cm, $QR = 6$ cm, $PR = 7$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி PQR ஐ அமைக்க.
- $\frac{AB}{PQ}, \frac{BC}{QR}, \frac{AC}{PR}$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களுக்கிடையிலான தொடர்புகளைப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.
- ஒவ்வோரு முக்கோணியினதும் மூன்று கோணங்களையும் வெவ்வேறாக அளந்து கொள்க.

- அதற்கேற்ப ABC, PQR ஆகிய முக்கோணிகள் எவ்வகையானவை?

முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்களுக்கிடையிலான விகிதங்கள் சமனானவை எனவும் முக்கோணி ABC யின் மூன்று கோணங்களும் முக்கோணி PQR இன் மூன்று கோணங்களுக்கும் சமனானவை எனவும் செயற்பாட்டின் மூலம் காணக் கூடியதாயிருக்கும்.

இப்பேறை இதற்கு முன்னர் கற்ற இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் தேற்றத்தின் மறுதலையாக இவ்வாறு முன்வைக்கலாம்.

தேற்றம்: ஒரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களும் இன்னுமொரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களுக்கும் விகித சமனாகுமாயின் அவ்விரண்டு முக்கோணிளும் இயல்பொத்த முக்கோணிகளாகும்

உதாரணம் 1

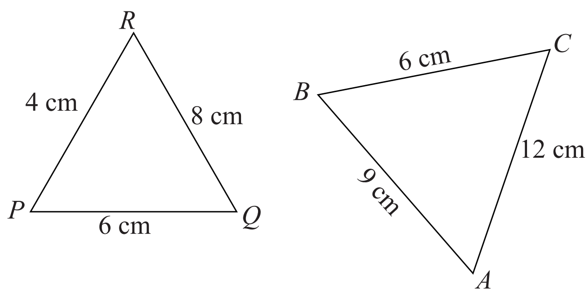
உருவில் தரப்பட்டுள்ள பக்கங்களின் நீளங்களுக்கு ஏற்ப, ABC, PQR ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை எனக் காரணங்களுடன் காட்டுக. ஒன்றுக்கொன்று சமனாகும் கோணச் சோடிகளைப் பெயரிடுக.

இரண்டு முக்கோணிகளிலும் தரப்பட்டுள்ள பக்கங்களின் நீளங்களுக்கேற்க, விகிதங்களை எழுதினால்,

(i) $\frac{PQ}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{RQ}{CA} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

(iii) $\frac{PR}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



இவ்விகிதங்கள் சமனானவை என்பதால், தேற்றத்தின் மறுதலையின்படி PQR, ABC ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை ஆகும்.

முக்கோணி PQR இல், PQ இற்கு எதிரான கோணம் $\hat{R}$

PR இற்கு எதிரான கோணம் $\hat{Q}$

QR இற்கு எதிரான கோணம் $\hat{P}$

முக்கோணி ABC இல் AB இற்கு எதிரான கோணம் $\hat{C}$

BC இற்கு எதிரான கோணம் $\hat{A}$

AC இற்கு எதிரான கோணம் $\hat{B}$

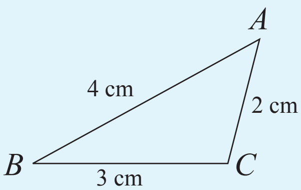
$\therefore\ \hat{P} = \hat{B}, \hat{Q} = \hat{A}, \hat{R} = \hat{C}$

"பக்கங்களுக்கிடையிலானவிகிதங்கள்சமனாகவுள்ளமுக்கோணிகள்இயல்பொத்தவை ஆகும்" என்னும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கீழே உள்ள பயிற்சியில் ஈடுபடுங்கள்.

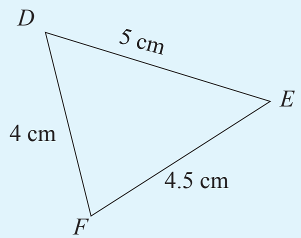
பயிற்சி 14.5

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள அளவுகளுடனான முக்கோணிகளின் பருமட்டான உருவங்களிலிருந்து மூன்று இயல்பொத்த முக்கோணச் சோடிகளைத் தெரிக.

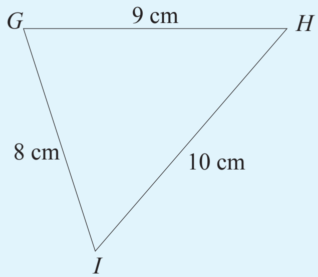
(i)



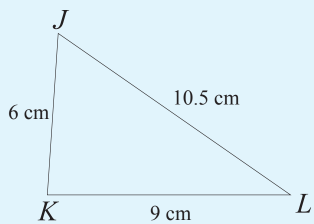
(ii)



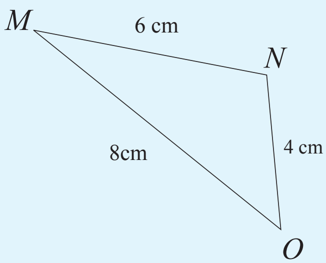
(iii)



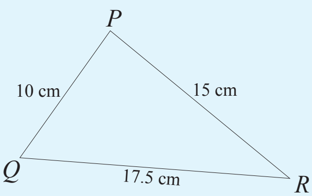
(iv)



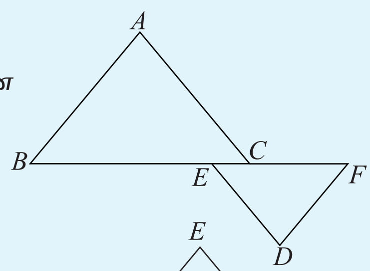
(v)



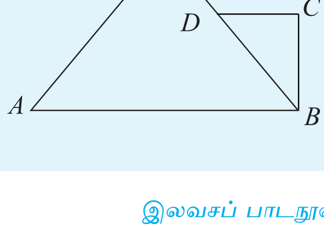
(vi)



2. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{ED} = \dfrac{BC}{DF}$ ஆகும். $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ ஆகிய கோணங்களுக்கு சமமான வேறொரு கோணத்தைப் பெயரிடுக.



3. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $AB = 20$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 4$ cm, $DB = 8$ cm, $DE = 2$ cm $AE = 15$ cm உம் ஆகும். $AB//DC$ எனக் காட்டுக. மேலும் நீட்டப்பட்ட CD யை AE ஆனது F இல்

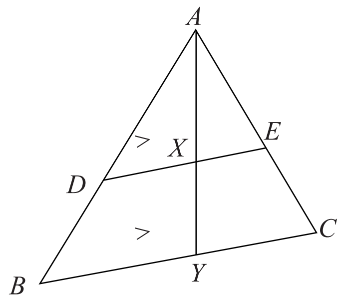


சந்திக்கின்றது. எனின் AF இன் நீளத்தைக் காண்க.

14.5 இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் தேற்றத்திலிருந்து எறிகளின் நிறுவல்கள்

இதுவரை கற்ற தேற்றங்களை தேவைக்கேற்பப் பயன்படுத்தி ஏறிகளின் நிறுவல்களைச் செய்யும் முறைகளை இப்போது கற்போம். இதற்காக கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்களைக் கற்க.

உதாரணம் 1



முக்கோணி ABC இல் AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் மீது $DE//BC$ ஆகுமாறு D, E ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. DE யை X இலும். BC யை Y யிலும் வெட்டுமாறு AY வரையப்பட்டுள்ளது.

(i) $\dfrac{XE}{YC} = \dfrac{AX}{AY}$ எனவும்

(ii) $\dfrac{XE}{YC} = \dfrac{DX}{BY}$ எனவும்

நிறுவுக.

நிறுவல் : உருவிலுள்ள AXE, AYC ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளில்

$A\hat{X}E = A\hat{Y}C$ (ஒத்த கோணங்கள், $XE//YC$)

$A\hat{E}X = A\hat{C}Y$ (ஒத்த கோணங்கள், $XE//YC$)

$\hat{A}$ இரண்டு முக்கோணிகளுக்கும் பொதுவானது

$\therefore$ AXE, AYC ஆகியன இரண்டு இயல்பொத்த முக்கோணிகளாகும்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமனானவை ஆகும்.

அப்போது $\dfrac{AX}{AY} = \dfrac{XE}{YC}$ (தேற்றத்தின் படி)

(ii) உருவிலுள்ள ADX, ABY ஆகிய முக்கோணிகளில்

$A\hat{D}X = A\hat{B}Y$ (ஒத்த கோணங்கள், $DX//BY$)

$A\hat{X}D = A\hat{Y}B$ (ஒத்த கோணங்கள், $DX//BY$)

$\hat{A}$ இரண்டு முக்கோணிகளுக்கும் பொதுவானது

$\therefore$ ADX, ABY ஆகியன இரண்டும் இயல்பொத்த முக்கோணிகளாகும்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமனானவை ஆகும்.

$\therefore \quad \dfrac{AX}{AY} = \dfrac{DX}{BY}$

ஆனால் $\dfrac{AX}{AY} = \dfrac{XE}{YC}$ (நிறுவியது)

$\therefore \quad \dfrac{XE}{YC} = \dfrac{DX}{BY}$

இனி கீழே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சியில் ஈடுபடுவோம்.

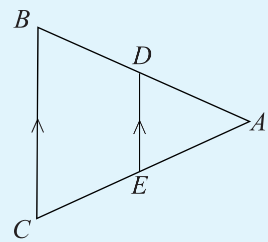
பயிற்சி 14.6

1. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

(i) ADE, ABC ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை எனக் காட்டுக.

(ii) $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC}$ என நிறுவுக.

(iii) $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{AC}{BC}$ என நிறுவுக.

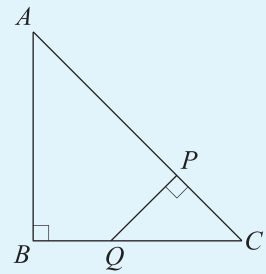


2. உருவில் தரப்பட்டள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

(i) ABC, PQC ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை எனவும்

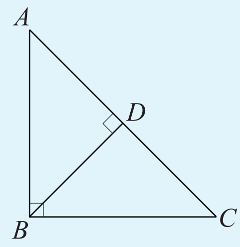
(ii) $\dfrac{QC}{AC} = \dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{PC}{BC}$ எனவும்

நிறுவுக.

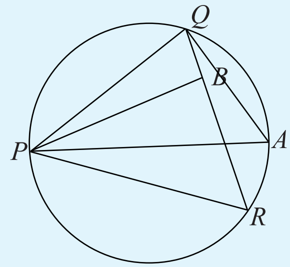


3. முக்கோணி ABC யில் $\hat{B}$ செங்கோணமாகும். B யிலிருந்து AC யிற்கு வரைந்த செங்குத்து BD ஆகும்.

$AB^2 = AD.\,AC$ என நிறுவுக.



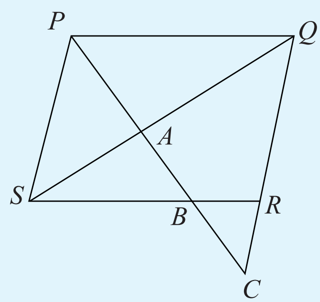
4. PA என்பது முக்கோணி PQR இன் சுற்றுவட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும். P லிருந்து QR இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து PB ஆகும்.



(i) PQA, PBR ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை என நிறுவுக.

(ii) $\dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{PA}{PR}$ என நிறுவுக.

5. இணைகரம் $PQRS$ இல் கோணம் $Q\hat{P}S$ இன் இருசமகூறாக்கியானது மூலைவிட்டம் QS ஐ A இலும் பக்கம் SR ஐ B யிலும் வெட்டிச் சென்று நீட்டப்பட்ட QR ஐ C யில் சந்திக்கின்றது.



$\dfrac{PQ}{PS} = \dfrac{PC}{PB}$ என நிறுவுக.

6. முக்கோணி ABC இல் பக்கம் AB யின் மீது P உம் பக்கம் AC யின் மீது Q வும் $A\hat{P}Q = A\hat{C}B$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. $AP.AB = AQ.AC$ என நிறுவுக.

7. முக்கோணி ABC யின் உச்சிகள் ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன. $B\hat{A}C$ இன் இருசமகூறாக்கியின் மூலம் பக்கம் BC ஆனது Q விலும் வட்டமானது P யிலும் வெட்டப்படுகின்றன. $AC : AP = AQ : AB$ என நிறுவுக.

8. முக்கோணி ABC யில் $B\hat{A}C$ யின் இருசம கூறாக்கியானது பக்கம் BC யை D யில் சந்திக்கின்றது. $CX = CD$ ஆகுமாறு நீட்டப்பட்ட AD யின் மீது புள்ளி X அமைந்துள்ளது.

(i) ACX , ABD ஆகியன இயல்பொத்த முக்கோணிகள் எனவும்

(ii) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$ எனவும் நிறுவுக.

பலவினப் பயிற்சி

1. செவ்வகம் $ABCD$ இல் $A\hat{E}B = 90^\circ$ ஆகுமாறு DC இன் மீது புள்ளி E அமைந்துள்ளது. ADE, AEB, EBC ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை என நிறுவுக.

2. முக்கோணி ABC யில் $\hat{B}$ செங்கோணமாகும். $AB = 5$ cm, $BC = 2$ cm ஆகும். AC யின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியானது பக்கம் AB யை Q வில் சந்திக்கின்றது. $AQ = 2.9$ cm எனக் காட்டுக.

3. முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AB ஐ P யிலும் பக்கம் AC யை Qவிலும் சந்திக்குமாறு, BC யிற்கு சமாந்தரமாக PQ வரையப்பட்டுள்ளது. CP, BQ ஆகிய கோடுகள் ஒன்றையொன்று S இல் இடைவெட்டுகின்றன. பக்கம் BC ஐ R இல் சந்திக்குமாறு AB யிற்கு சமாந்தரமாக SR வரையப்பட்டுள்ளது.
$\frac{BR}{RC} = \frac{AQ}{AC}$ என நிறுவுக.

15 தரவுகளை வகைகுறித்தல்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

கூட்டமாக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பலின்

- வகுப்பு எல்லையை, வகுப்பு வரைப்பைக் காண்பதற்கும்
- வலையுருவரையத்தை வரைவதற்கும்
- மீடிறன் பல்கோணியை வரைவதற்கும்
- திரள் மீடிறன் வளையியை வரைவதற்கும் அதிலிருந்து காலணை இடைவீச்சைக் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

வகுப்பாயிடையின் எல்லையும் வரைப்பும்

30 மாணவர்களின் உயரங்களை (கிட்டிய சென்ரிமீற்றரில்) அளந்து பெறப்பட்ட ஒரு தரவுத் தொகுதி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

137, 135, 141, 147, 151, 135, 137, 143, 144, 145
140, 134, 141, 140, 153, 144, 133, 138, 155, 130
136, 137, 142, 143, 145, 143, 154, 146, 148, 158

தரவுகளிலுள்ள கூடிய பெறுமானத்திலிருந்து குறைந்த பெறுமானத்தைக் கழிக்கும்போது பெறப்படும் பெறுமானம் **வீச்சு** என அழைக்கப்படுகின்றது என்பதை நாம் அறிவோம். அதாவது

தரவுகளின் வீச்சு $= 158 - 130$
$= 28$

கற்பதை இலகுவாக்குவதற்காக ஒரு தரவுத் தொகுதி ஒரு மீடிறன் பரம்பலாகப் பெரும்பாலும் தரப்படும். தரவுகளின் வீச்சு அதிகமாக உள்ளபோது தரவுகள் வகுப்பாயிடைகளாகப் பிரித்து எழுதப்படும் என்பதை நாம் அறிவோம். அவ்வாறு வகுப்பாயிடைகளாகப் பிரித்து எழுதப்படுகின்ற மீடிறன் பரம்பல்கள் **கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பல்கள்** எனப்படும். ஆயிடைகளின் எண்ணிக்கை பொதுவாக 5 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலான ஒரு பெறுமானமாக இருக்கும். இவ்வாறான ஒரு பரம்பலின் வகுப்பாயிடையின் பருமன் எனப்படுவது மீடிறன் பரம்பலின் வீச்சை வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கையால் வகுப்பதால் பெறப்படும் பெறுமானத்திலும் கூடிய நிறைவெண்களில் குறைந்த பெறுமானத்தையே ஆகும்.

உதாரணமாக மேலே குறிப்பிட்ட தரவுகளை 6 வகுப்பாயிடைகளாகக் கோவைப்படுத்துவோமானால் வகுப்பாயிடையின் பருமனைக் காண்பதற்காக முதலில் வீச்சாகிய 28 ஐ வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கையாகிய 6 இனால் வகுப்போம்.

$$= \frac{28}{6}$$

$$\approx 4.66 \text{ பெறப்படும்.}$$

எனவே, வகுப்பாயிடையின் பருமனாகத் தெரிவு செய்ய வேண்டியது, 4.66 இலும் கூடிய நிறைவெண்களில் குறைந்த பெறுமானமாகிய 5 ஐயே ஆகும். பின்னர் முதலாவது வகுப்பாயிடையினைத் தெரிவுசெய்ய வேண்டும். தரவுகளின் குறைந்த பெறுமானம் 130 என்பதால் முதலாவது வகுப்பாயிடையை 130 இலிருந்து ஆரம்பிக்க வேண்டும்.

தரப்பட்ட தரவுத் தொகுதியிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்ட கூட்டமாக்கப்பட்ட இரண்டு மீடிறன் பரம்பல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்
130 - 135	3
135 - 140	7
140 - 145	10
145 - 150	5
150 - 155	3
155 - 160	2

முதலாவது கூட்டமாக்கப்பட்ட பரம்பல்

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்
130 - 134	3
135 - 139	7
140 - 144	10
145 - 149	5
150 - 154	3
155 - 169	2

இரண்டாவது கூட்டமாக்கப்பட்ட பரம்பல்

முதலில் முதலாவது பரம்பலைக் கவனத்திற் கொள்ளவும். உதாரணமாக அதிலுள்ள 130 - 135 என்னும் வகுப்பாயிடையினால் தரப்படுவது 130 இலும் கூடிய அல்லது சமனான 135 இலும் குறைந்த உயரப் பெறுமானங்களாகும். இரண்டாவது வகுப்பாயிடை ஆகிய 135 - 140 இனால் தரப்படுவது 135 இலும் கூடிய அல்லது சமனான 140 இலும் குறைந்த உயரப் பெறுமானங்களாகும். இவ்வாறாக மற்றைய வகுப்பாயிடைகளையும் விவரிக்கலாம்.

இனி, இரண்டாவது பரம்பலைக் கவனத்தில் கொள்ளவும். அங்கு உதாரணமாக 130 - 134 என்னும் வகுப்பாயிடையினால் தரப்படுவது 130 இலும் கூடிய அல்லது சமனான 134 இலும் குறைந்த அல்லது சமனான உயரப் பெறுமானங்களாகும்.

இந்த இரண்டு பரம்பல்களிலும் வகுப்பாயிடை பற்றி அவதானிக்கக்கூடிய பிறிதொரு வேறுபாட்டை இப்போது கவனத்தில் கொள்வோம். முதலாவது பரம்பலில் வகுப்பாயிடைகளுக்கிடையே இடைவெளி இல்லை. உதாரணமாக 130 - 135 வகுப்பாயிடையின் மேல் எல்லையாகிய 135 ஆனது அடுத்த வகுப்பாயிடை ஆகிய

135 - 140 இன் கீழ் எல்லாயாகும். அதாவது இங்கு வகுப்பாயிடைகளில் ஒரு பொது எல்லை உண்டு. ஆயினும் இரண்டாவது பரம்பலில் அவ்வாறிருப்பதில்லை. உதாரணமாக 130 - 134 வகுப்பாயிடையின் மேல் எல்லை 134 ஆக இருப்பதுடன் அடுத்த ஆயிடை 135 இல் ஆரம்பிக்கின்றது. இவ்வெல்லைகளுக்கிடையே வித்தியாசம் 1 ஆகும். இப்பாடத்தில் அடுத்த பகுதியில் நாம் கற்க எதிர்பார்க்கும் வலையுரு வரையத்தை வரைவதற்கு இவ்வாறான இடைவெளி இல்லாதிருக்க வேண்டும். எனவே, இரண்டாவது பரம்பலைப் பொருத்தமானவாறு எல்லைகளை மாற்றிக் கொள்ள வேண்டும். இங்குள்ள வகுப்பாயிடைகளுக்கு ஒரு பொது எல்லையை அறிமுகஞ் செய்வதன் மூலம் இம்மாற்றம் செய்யப்படுகின்றது. இப்பொது எல்லையை இலகுவாக அறிந்து கொள்ளலாம். உதாரணமாக, இரண்டாவது பரம்பலில் 130 - 134 வகுப்பாயிடையின் மேல் எல்லையாகிய 134 இற்கும் 135 - 139 வகுப்பாயிடையின் கீழ் எல்லையாகிய 135 இற்கும் மத்தியில் அமைந்துள்ள 134.5 என்பது பொது எல்லையாகக் கொள்ளப்படும். இதற்கேற்ப தயாரிக்கப்பட்ட புதிய பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

பொது எல்லையைக் கொண்ட வகுப்பாயிடைகள்	மீடிறன்
129.5 - 134.5	3
134.5 - 139.5	7
139.5 - 144.5	10
144.5 - 149.5	5
149.5 - 154.5	3
154.5 - 159.5	2

இங்கு முதலாவது பரம்பலின் எல்லா வகுப்பாயிடைகளிலும் கீழ் எல்லை 0.5 குறைந்துள்ளது என்பதையும் மேல் எல்லைக்கு 0.5 கூட்டப்பட்டுள்ளது என்பதையும் அவதானிக்கவும். இவ்விதியானது முதலாவது மற்றும் கடைசி வகுப்பாயிடைகளுக்கும் செல்லுபடியாகும். இதற்கேற்ப 129.5, 159.5 என்பவை பெறப்பட்டுள்ளன என்பதையும் அவதானிக்கவும். அவ்வாறே இப்புதிய பரம்பலின் வகுப்பாயிடையின் பருமன் 5 ஆகின்றது என்பதையும் அவதானிக்கவும்.

மேற்குறித்த முதலாவது வகையான கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பல் எளிதானதாகும். ஆயினும் செயன்முறையாக இரண்டாது வகையிலான பரம்பலை அமைத்தல் இலகுவானதாகும். இந்த இரண்டு வகையிலான பரம்பல்களையும் புள்ளி விவரவியலில் பெரும்பாலும் காணலாம்.

15.1 கூட்டமாக்கப்பட்ட ஒரு பரம்பலின் வலையுரு வரையம்

இப்போது கூட்டமாக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் தரப்பட்டுள்ளபோது வலையுரு வரையம் வரையும் முறையை ஆராய்வோம். வலையுருவரையம் எனப்படுவது ஓர் எண் பரம்பலில் உள்ள தரவுகளை வரைபுபடுத்தும் ஒரு முறையாகும். இங்கு வகுப்பாயிடைகளின் மீடிறன் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் செவ்வக வடிவிலான நிரல்களின் உயரங்களால் குறிக்கப்படும். எல்லா வகுப்பாயிடைகளினதும் பருமன் சமனாக உள்ள சந்தர்ப்பத்தில் (மேலேயுள்ள பகுதியில் உதாரணத்தில் இருந்தவாறு) வலையுருவரையத்தை வரையும் விதத்தை முதலில் கவனிப்போம்.

ஒரு வலையுருவரையத்தை வரைவதற்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ள படிமுறைகளைப் பின்பற்றுக.

* பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைப் பயன்படுத்தி கிடை அச்சின் மீது வகுப்பின் வரையறைகளைக் குறிக்க.
* பொருத்தமான அளவிடையில் நிலைக்குத்து அச்சின் மீது ஒவ்வொரு வகுப்பாயிடையினதும் மீடிறனின் உயரத்தை குறிக்கும் நிரலை வரைக.

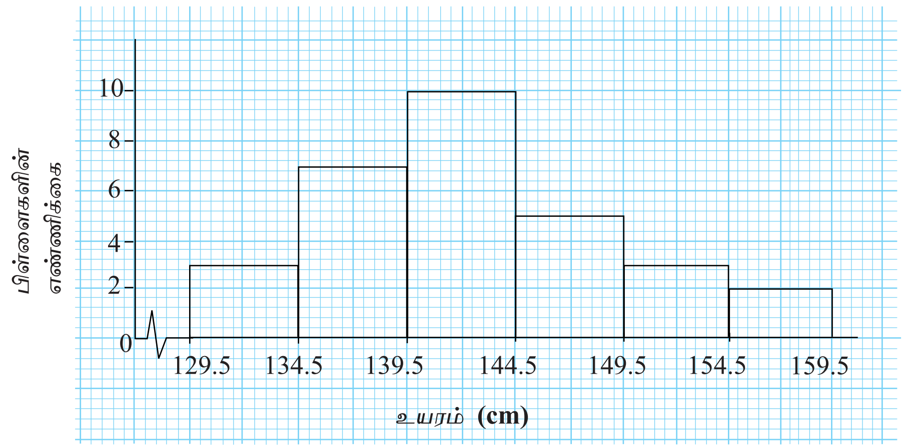
இனிப் பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் ஒரு வலையுருவரையத்தை வரையும் விதத்தை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

மேலேயுள்ள பகுதியில் இருந்த உதாரணத்தில் தயாரித்த கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலின் வலையுருவரையத்தை வரைக. இதற்கு இரண்டாவது வகையிலான மீடிறன் பரம்பலைக் கருதுவோம்.

பொது வரைப்புகளை கொண்ட வகுப்பாயிடைகள்	மீடிறன்
129.5 - 134.5	3
134.5 - 139.5	7
139.5 - 144.5	10
144.5 - 149.5	5
149.5 - 154.5	3
154.5 - 159.5	2

உரிய வலையுருவரையம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. கிடை அச்சு வழியே இரண்டு சிறிய கட்டங்களினால் 1 cm குறிக்கப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்து அச்சு வழியே 5 சிறிய கட்டங்களினால் 2 பிள்ளைகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளனர்.



இங்கு நிரல்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டிருக்கின்றன என்பதை அவதானிக்கவும்.

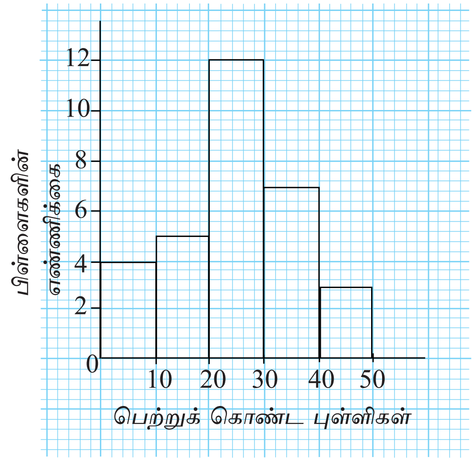
குறிப்பு: இங்கு தரவுகள் 129.5 இல் தொடங்குவதால் 0 இலிருந்து 129.5 வரையிலான வகுப்பாயிடைகளை வலையுருவரையத்தில் காட்டுவது அவசியமற்றதாகும். மேற்குறித்த பகுதி கவனத்தில் கொள்ளப்படவில்லை என்பதைக் காட்டுவதற்காக x அச்சில் தொடக்கத்தில் ⁄\/— என்னும் குறியீடு இடப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 2

பாடசாலை மட்டக் கணிப்பீடொன்றில் பிள்ளைகள் கணித பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகளைக் காட்டும் ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு உதாரணமாக 0 - 10 வகுப்பாயிடையினால் 0 இலும் கூடிய அல்லது சமனான 10 இலும் குறைந்த புள்ளிகள் குறிப்பிடப்படுகின்றன. இவ்வாறே மற்றைய வகுப்பாயிடைகளும் வரையறுக்கப்படும். மீடிறன் பரம்பலைக் குறிக்கும் வலையுரு வரையத்தை வரைக.

வகுப்பாயிடை (பெற்றுக் கொண்ட புள்ளிகள்)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
மீடிறன் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	4	5	12	7	3

இம்மீடிறன் பரம்பலின் முதலாவது வகுப்பாயிடை 10 இல் முடிவடைவதுடன் அடுத்த வகுப்பாயிடை 10 இல் தொடங்குகிறது. இங்கு வலையுருவரையத்தை மிக எளிதாக வரையலாம்.



வகுப்பாயிடைகளின் பருமன் சமனற்றதாக உள்ள ஒரு மீடிறன் பரம்பலில் வலையுரு வரையத்தை வரைவது தொடர்பாக இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 3

ஒரு தவணைப் பரீட்சையில் கணித பாடத்தில் 40 பிள்ளைகள் பெற்றுக் கொண்ட புள்ளிகளிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

வகுப்பாயிடைகள் (பெற்ற புள்ளிகள்)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 70	70 - 100
மீடிறன் (பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை)	2	4	6	9	5	8	6

இங்கு வகுப்பாயிடைகளைப் பரீட்சித்துப் பார்க்கும்போது வகுப்பாயிடைகளின் பருமன்கள் சமனாக இல்லாதிருப்பதை நீங்கள் காண்பீர்கள். முதல் 5 ஆயிடைகளின் பருமன் 10 ஆக இருப்பதுடன் அடுத்து வரும் இரண்டு ஆயிடைகளின் பருமன்கள் முறையே 20, 30 ஆகும். வலையுருவரையமொன்றின் முக்கிய ஒரு பண்பாவது நிரல்களின் பரப்பளவுகள் உரிய மீடிறன்களுக்கு நேர் விகிதசமனாவதாகும். அதற்கேற்ப வகுப்பாயிடைகளின் பருமன் சமனாக உள்ளபோது மீடிறன் நிரலின் உயரத்துக்கு நேர்விகித சமனாகும். எனவே மேலே 1, 2 ஆகிய உதாரணங்களில் மீடிறனை உயரத்தின் மூலம் ஒரே முறையில் காட்ட முடிந்தது. ஆயினும் இங்கு வகுப்பாயிடைகளின் பருமன்கள் சமனாக இல்லாததால் மீடிறனை உயரத்தின் மூலம் ஒரே முறையில் காட்ட முடியாது. நிரலின் உயரத்தை மீடிறனுக்கு நேர்விகிதசமனாகுமாறு அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும். அது பின்வருமாறு செய்யப்படும்.

மீடிறன் பரம்பலில் 50 - 70, 70 - 100 தவிர மற்றைய வகுப்பாயிடைகளின் பருமன்கள் 10 ஆகும். 50 - 70 வகுப்பாயிடையின் பருமன் 20 உம் 70 - 100 வகுப்பாயிடையின் பருமன் 30 உம் ஆகும்.
இதற்கேற்ப சிறிய வகுப்பாயிடைகளின் பருமன் 10 ஆகும். 50 - 70 வகுப்பாயிடையின் பருமன் அதன் இரண்டு மடங்காகும் வகுப்பாயிடையின் மீடிறனைக் குறிக்கும் நிரலின் பரப்பளவானது மீடிறனுக்கு நேர்விகித சமன் ஆகவேண்டும் என்பதால்

$$\text{நிரலின் உயரம்} = \frac{\text{மீடிறன்}}{2}$$

எனக் கணிக்கப்படும்.

$\therefore$ 50 - 70 வகுப்பாயிடையின் நிரலின் உயரம் $= \frac{8}{2}$

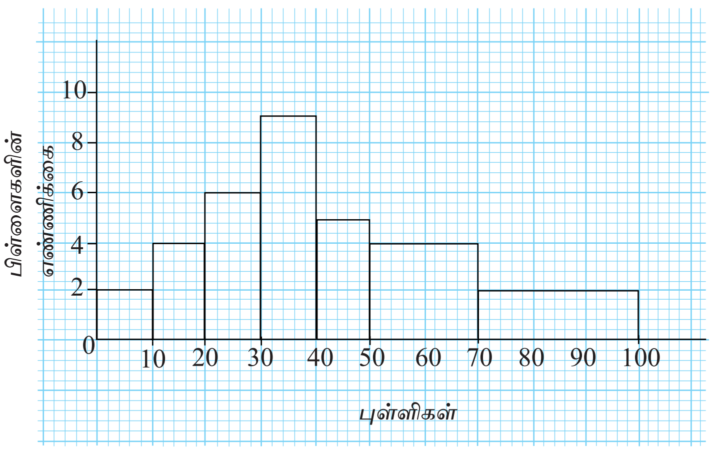
$= 4$

70 - 100 வகுப்பாயிடையின் பருமன் சிறிய வகுப்பாயிடையின் பருமனின் மூன்று மடங்காகும்.

$\therefore$ 70 - 100 வகுப்பாயிடையின் நிரலின் உயரம். $= \frac{6}{3}$

$= 2$ எனக் கணிக்கப்படும்.

இவ்வாறு கணித்தபின் வரைந்த வலையுருவரையம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



பயிற்சி 15.1

1. குறித்த ஒரு பிரதேசத்தின் காலநிலை அவதான நிலையமொன்றிலிருந்து திரட்டப்பட்ட தகவல்களிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இத்தகவல்களை ஒரு வலையுருவரையத்தில் தருக.

வகுப்பாயிடை (ஒரு வாரத்தின் மழை வீழ்ச்சி mm இல்)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
மீடிறன் (வாரங்களின் எண்ணிக்கை)	5	6	15	10	7	5	4

2. 2015 ஆம் ஆண்டின் பாடசாலை நூலகமொன்றிலிருந்து தினமும் வாசிப்பதற்காக விநியோகிக்கப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கைகளைக் காட்டும் ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. மீடிறன் பரம்பலின் வலையுருவரையத்தை வரைக.

வகுப்பாயிடை (விநியோகிக்கப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை)	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 - 54
மீடிறன் (நாட்களின் எண்ணிக்கை)	5	10	20	15	10	7

3. வனவளர்ப்பு திட்டமொன்றில் 10 ஹெக்ரேயரில் இருந்த மரங்களின் சுற்றளவு களை அளந்து திரட்டிய தரவுகளிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இத்தரவுகளை ஒரு வலையுருவரையத்தில் குறிக்க.

ஒரு மரத்தின் சுற்றளவு (cm)	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60
மரங்களின் எண்ணிக்கை	6	8	9	15	24	21

4. ஒரு கிராமிய நீர்ப்பாசன செயற்றிட்டமொன்றில் ஒரு மாதத்தில் ஒவ்வொரு வீடுகளிலும் பெற்றுக்கொள்ளப்பட்ட நீரின் அளவு பற்றித் திரட்டிய தகவல்களிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்று கீழே தரப்பட்டுள்ளது. அம்மாதத்தின் வீடுகளின் நீர்ப் பாவனையை ஒரு வலையுரு வரையத்தில் தருக.

பயன் படுத்திய நீரின் அளவு (லீற்றர்)	8 - 12	13 - 17	18 - 22	23 - 27	28 - 32	33 - 37	38 - 42
வீடுகளின் எண்ணிக்கை	4	6	15	15	10	7	3

5. குறித்த ஒரு கிராமத்தில் உள்ள 75 வீடுகளில் 2015 ஜனவரி மாதம் பயன்படுத்திய மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை பற்றித் திரட்டிய தகவல்கள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. இத்தகவல்களை ஒரு வலையுருவரையத்தில் வரைக.

வகுப்பாயிடை (மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 100
மீடிறன் (வீடுகளின் எண்ணிக்கை)	10	11	14	16	12	12

6. தொலைபேசி வசதி வழங்கப்படும் ஒரு நிலையத்திலிருந்து பெறப்பட்ட அழைப்புகளின் எண்ணிக்கையும் ஒவ்வொரு அழைப்பிற்கும் செலவாகும் நேரமும் பற்றிய தகவல்கள் கீழே மீடிறன் பரம்பலில் தரப்பட்டுள்ளன. இத்தகவல்களை ஒரு வலையுருவரையத்தில் குறிக்க.

ஓர் அழைப்பிற்கு செலவான நேரம் (செக்கன்கள்)	30 - 45	45 - 60	60 - 75	75 - 90	90 - 120
அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை	8	9	12	16	8

15.2 மீடிறன் பல்கோணி

மீடிறன் பல்கோணி எனப்படுவது வலையுருவரையத்தைப் போன்று கூட்டமாக்கப் பட்ட தரவுகளை வரைபுபடுத்தும் ஒரு முறையாகும்.
மீடிறன் பல்கோணியை இரண்டு முறைகளில் அமைக்கலாம்.
* வலையுரு வரையத்திலிருந்தும்
* வகுப்பாயிடைகளின் நடுப்பெறுமானம், மீடிறன் என்பவற்றிலிருந்தும் அமைக்கலாம்.

முதலில் வலையுரு வரையத்திலிருந்து ஒரு மீடிறன் பல்கோணியை அமைக்கும் முறையை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

முன்னைய ஓர் உதாரணத்தில் பயன்படுத்திய ஒரு மீடிறன் பரம்பலை இதற்கென எடுத்துக் கொள்வோம்.

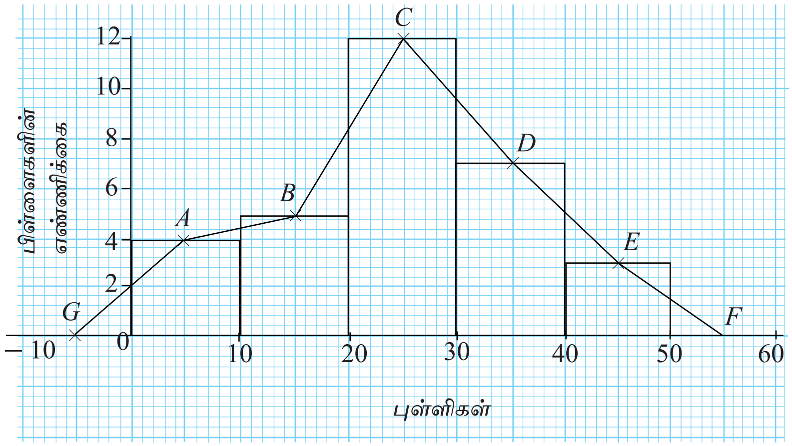
புள்ளிகள்	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	4	5	12	7	3

(i) முதலில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கு ஒத்த வலையுரு வரையத்தை வரைக.

(ii) வலையுருவரையத்தின் ஒவ்வொரு நிரலிலும் மேற்பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியில் "×" குறியீட்டை இடுக. (பின்வரும் உருவைப் பார்க்க. "×" குறியீடானது A, B, C, D, E எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.)

(iii) இந்த "×" குறியீடுகளை உருவிலுள்ளவாறு முறையே நேர்கோட்டுத் துண்டங்கள் மூலம் இணைக்க.

(iv) ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமனின் அரைப்பங்கு தூரத்தை (அதாவது, இங்கு 5 அலகுகள் தூரம்) கடைசி நிரலுக்கு வலது பக்கத்திலும் முதலாவது நிரலுக்கு இடது பக்கத்திலும் அச்சின் மீது குறிக்க. E, F ஐயும் A, G ஐயும் இணைக்க.



இப்போது பல்கோணி *GABCDEF* பெறப்பட்டுள்ளது. இப்பல்கோணி மீடிறன் பரம்பலின் **மீடிறன் பல்கோணி** எனப்படும்.

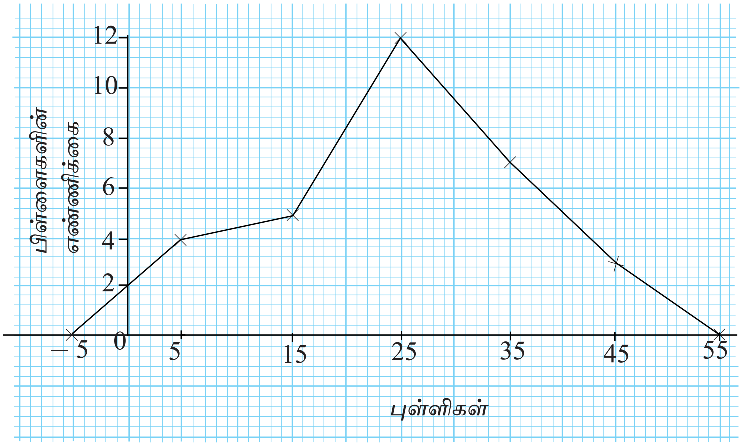
மீடிறன் பல்கோணியின் பரப்பளவு வலையுருவரையத்தின் பரப்பளவுக்குச் சமனாகும் என்பதை நீங்கள் நன்கு அவதானித்தால் காணலாம். எப்போதும் வலையுருவரையத்தை வரைந்த பின்னர் இரண்டாவதாக மீடிறன் பல்கோணியை வரைவது தேவையில்லை. வகுப்பாயிடைகளின் நடுப்பெறுமானம், மீடிறன் எனபவற்றிலிருந்து மீடிறன் பல்கோணியை நேரடியாக வரையலாம். அவ்வாறு செய்யும் முறையை பின்வரும் உதாரணம் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2

தரப்பட்டுள்ள மீடிறன் பரம்பலிலிருந்து ஒரு மீடிறன் பல்கோணியை வரைவதற்காக வகுப்பாயிடைகளின் நடுப்பெறுமானம் அடங்கிய ஓர் அட்டவணையைத் தயாரிக்க.

வகுப்பாயிடை	நடுப்பெறுமானம்	மீடிறன்
0 - 10	5	4
10 - 20	15	5
20 - 30	25	12
30 - 40	35	7
40 - 50	45	3

வகுப்பாயிடைகளின் நடுப் பெறுமானங்களை கிடை அச்சு வழியேயும் மீடிறனை நிலைக்குத்து அச்சு வழியேயும் குறித்து ஆயிடையொன்றின் நடுப்பெறுமானத்திற்கும் மீடிறனுக்கும் ஒத்த புள்ளிகளைக் குறிக்க. அப்புள்ளிகளை முறையே நேர்கோட்டுத் துண்டங்களினால் இணைப்பதன் மூலம் மேற்குறித்தவாறே ஒரு மீடிறன் பல்கோணியை வரையலாம்.



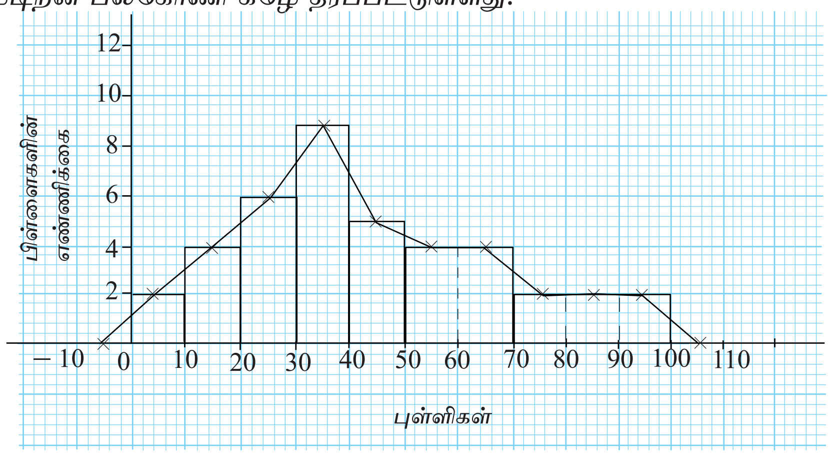
இனி, பருமன் சமனற்ற வகுப்பாயிடைகளை உடைய ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் மீடிறன் பல்கோணியை வரைதல் தொடர்பாக ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 3

முன்னர் நாம் எடுத்த பருமன் சமனற்ற வகுப்பாயிடைகளையுடைய மீடிறன் பரம்பலுக்கான மீடிறன் பல்கோணியை வரைவோம்.

வகுப்பாயிடை (பெற்ற புள்ளிகள்)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 70	70 - 100
மீடிறன் (பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை)	2	4	6	9	5	8	6

உரிய மீடிறன் பல்கோணி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



இங்கு பருமன் 20 ஆகவுள்ள வகுப்பாயிடைகளை பருமன் 10 ஆகவுள்ள இரண்டு வகுப்பாயிடைகளாகப் பிரித்து அவற்றின் நடுப் புள்ளிகளுக்கு ஒத்த மீடிறன்கள் கவனத்தில் கொள்ளப்பட்டுள்ளன. அவ்வாறே பருமன் 30 ஆகவுள்ள வகுப்பாயிடையை பருமன் 10 ஆகவுள்ள 3 வகுப்பாயிடைகளாகப் பிரித்து அவற்றின் நடுப் புள்ளிகளுக்கு

ஒத்த மீடிறன்களும் கவனத்தில் கொள்ளப்பட்டுள்ளன. இப்போது வலையுரு வரையத்தின் பரப்பளவானது நிரல்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகின்றது என்பதை அவதானிக்கவும்.

பயிற்சி 15.2

1. ஒரு பாடசாலையில் நடாத்தப்பட்ட வைத்திய பரிசோதனை முகாமில் பங்குபற்றிய பிள்ளைகளின் நிறைகளை அளந்து பெற்றப்பட்ட தகவல்களிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

ஒரு பிள்ளையின் நிறை (kg இல்)	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	8	10	15	7	15

(i) இத்தகவல்களை ஒரு வலையுரு வரையத்தில் தருக.

(ii) வலையுருவரையத்திலிருந்து மீடிறன் பரம்பலைக் குறிக்கும் மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.

2. ஒரு நிறுவனம் தனது உற்பத்திப் பொருளாகிய மின்குமிழ்களின் ஆயுட்காலத்தைப் பரீட்சித்துப்பார்ப்பதற்குச் செய்த ஒரு பரிசோதனையில் பெற்ற தரவுகளின்படி தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

வகுப்பாயிடை (ஒரு மின்குமிழ் ஒளிர்ந்த மணித்தியாலங்களின் எண்ணிக்கை)	100 - 300	300 - 400	400 - 500	500 - 600	600 - 700	700 - 800
மீடிறன் (மின்குமிழ்களின் எண்ணிக்கை)	12	10	20	25	15	12

(i) மீடிறன் பரம்பலின் வலையுருவரையத்தை வரைக.

(ii) வலையுருவரையத்திலிருந்து மீடிறன் பரம்பலைக் குறிக்கும் மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.

3. ஒரு விளையாட்டுக் கழகத்தின் அங்கத்தவர்களின் நிறை பற்றித் திரட்டப்பட்டுள்ள தரவுகள் கீழே அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

உடலின் நிறை kg	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80	80 - 85
அங்கத்தவர்களின் எண்ணிக்கை	10	15	6	4	2

(i) இத்தகவல்களிலிருந்து வகுப்பாயிடைகளின் நடுப் பெறுமானத்தைக் கொண்ட ஓர் அட்டவணையைத் தயாரிக்க.

(ii) வகுப்பாயிடைகளின் நடுப்பெறுமானத்தைக் கொண்டு மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.

4. ஒரு பாடசாலையில் தரம் 11 மாணவர்கள் கணித பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகளிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் அட்டவணையொன்று கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

வகுப்பாயிடை	0 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 100
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை மீடிறன்	6	5	10	7	12

இத்தகவல்களின் வலையுருவரையத்தை வரைந்து அதிலிருந்து தரவுகளைக் குறிக்கும் மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.

5. குறித்த ஒரு தினத்தில் தொலைபேசி வசதிகள் வழங்கும் ஒரு மத்திய நிலையத்திலிருந்து பெற்றுக் கொண்ட தொலைபேசி அழைப்புகள் மற்றும் அழைப்பு நேரம் தொடர்பாகத் திரட்டப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஓர் அழைப்பிற்குச் செலவான நேரம் (செக்கன்கள்)	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 15
அழைப்புக்களின் எண்ணிக்கை	3	9	20	12	6

(i) இம்மீடிறன் பரம்பலின் வலையுருவரையத்தை வரைக.
(ii) அவ்வலையுருவரையத்திலிருந்து மீடிறன் பரம்பலின் மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.

15.3 கூட்டமாக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் திரள் மீடிறன் வளையி

இது ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் தரவுகளை வரைபுப்படுத்தும் இன்னுமொரு முறையாகும். திரள் மீடிறன் வளையியை வரையும் முறையை பின்வரும் உதாரணத்திலிருந்து ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

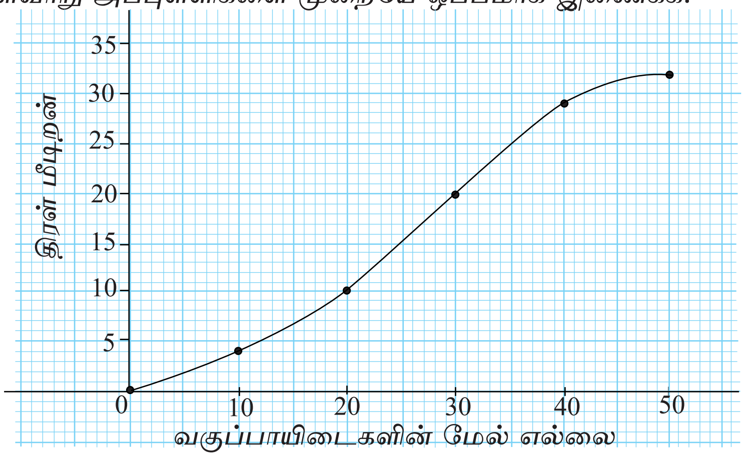
ஒரு வகுப்பிலுள்ள 32 மாணவர்கள் கணிதபாடப் பரீட்சையொன்றில் பெற்ற புள்ளிகள் கீழே உள்ளவாறு மீடிறன் பரம்பலினால் தரப்பட்டுள்ளன. இதன் திரள் மீடிறன் வளையியை வரைவோம்.

வகுப்பாயிடை	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	4	6	10	9	3

முதலில் மேலேயுள்ள அட்டவணையிலிருந்து ஒரு திரள் மீடிறன் அட்டவணையைத் தயாரிப்போம்.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்	திரள் மீடிறன்
0 - 10	4	4
10 - 20	6	10
20 - 30	10	20
30 - 40	9	29
40 - 50	3	32

திரள் என்பதன் கருத்து கூட்டப்பட்ட என்பதாகும். மேலேயுள்ள அட்டவணையில் உதாரணமாக 20 - 30 வகுப்பாயிடைக்குரிய திரள் மீடிறன் 30 இலும் குறைந்த எல்லா மீடிறன்களிலும் கூட்டுத் தொகையாகும் (வேறொரு விதமாக கூறுவதாயின் 30 இலும் குறைவாகப் புள்ளிகளைப் பெற்ற பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்). அது 20 ஆகும். 40 - 50 ஆயிடைக்குரிய திரள் மீடிறன் 50 இலும் குறைவான புள்ளிகளைப் பெற்ற பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கையாகும். அதாவது எல்லாப் பிள்ளைகளினதும் எண்ணிக்கையாகிய 32 ஆகும். இவ்வாறு அட்டவணையை அமைத்த பின்னர் திரள் மீடிறனைக் குறிக்கும் எல்லாப் புள்ளிகளையும் குறிக்க. பின்னர் கீழே உள்ள உருவில் தரப்பட்டுள்ளவாறு அப்புள்ளிகளை முறையே ஒப்பமாக இணைக்க.



ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் காலணையும் காலணை இடை வீச்சும்

மேலே உள்ள பகுதிகளில் ஒரு தரவுத் தொகுதியின் வலையுரு வரையத்தையும் மீடிறன் பல்கோணியையும் பெற்றுக் கொள்ளும் முறை பற்றி ஆராய்ந்தோம். அதன் மூலம் தரவுகள் பரம்பியுள்ள முறையைப் பற்றி ஒரு கருத்தைப் பெற்றுக் கொள்வது இலகுவானதாகும். உதாரணமாகக் கூட்டமாக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் ஆகார வகுப்பு யாது என்பதை வலையுருவரையத்தைப் பார்த்தவுடன் தீர்மானித்துக் கொள்ளலாம். அவ்வாறே தரவுகள் சமச்சீராக பரம்பியுள்ளனவா என்பதைப் பற்றியும் ஒரு கருத்தைப் பெற்றுக் கொள்ளலாம். இப்பகுதியில் நாம் ஒரு தரவுத் தொகுதியின் காலணை, காலணை இடைவீச்சு பற்றிக் கற்பதற்கு எதிர்பார்க்கின்றோம். அதிலிருந்து தரவுகள் பரம்பியுள்ள விதம் பற்றியும் ஏதேனுமொரு கருத்தைப் பெற்றுக் கொள்ளலாம்.

ஒரு தரவுத் தொகுதியின் காலணை, காலணை இடைவீச்சு என்பவற்றைக் காண்பதற்காக முதலில் நாம் செய்ய வேண்டியது அத்தரவுகளை ஏறுவரிசையில் எழுதுவதாகும். அதன் பின்னர் முதலாம் காலணை Q_1, இரண்டாம் காலணை Q_2, மூன்றாம் காலணை Q_3 என்பன கணிக்கப்படும்.

படி 1: முதலில் தரவுகளின் இடயத்தைக் காண்க. இது இரண்டாம் காலணை ஆகும்.
படி 2: இடையத்துக்கு இடப்பக்கத்திலுள்ள தரவுகளின் இடையத்தைக் காண்க. இது முதலாம் காலணை ஆகும்.
படி 3: இடையத்துக்கு வலப்பக்கத்திலுள்ள தரவுகளின் இடையத்தைக் காண்க. இது மூன்றாம் காலணை ஆகும்.

உதாரணமாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுத் தொகுதியில் தரவுகள் ஏறுவரிசையில் தரவுக் கோவைகளாக (கொத்தாக) எழுதப்பட்டுள்ளன.

உதாரணம் 1

5, 6, 6, 8, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 17, 18, 20, 24, 25, 26, 30

இங்குள்ள தரவுகளின் எண்ணிக்கை 19 ஆகும். அதற்கேற்ப இதன் இடையம் ஆவது 14 ஆகும். (இது கட்டமிடப்பட்டுள்ளது.)

5, 6, 6, 8, 11, 12, 12, 12, 13, [14], 14, 14, 17, 18, 20, 24, 25, 26, 30

இனி இடையத்தின் இடப் பக்கத்திலுள்ள ஈட்டுகளின் தொகுதியைக் கருதுக.

5, 6, 6, 8, [11], 12, 12, 12, 13

இங்கு இடையம் ஆவது 11 ஆகும். அதுவும் கட்டமிடப்பட்டுள்ளது.
இறுதியாக இடையத்தின் இடப் பக்கத்திலுள்ள ஈட்டுகளைக் கருதுக.

14, 14, 17, 18, [20], 24, 25, 26, 30

இங்கு இடையம் 20 ஆகும். அதுவும் கட்டமிடப்பட்டுள்ளது.

அதாவது, முதலாம் காலணை $= Q_1 = 11$
இரண்டாம் காலணை $= Q_2 = 14$
மூன்றாம் காலணை $= Q_3 = 20$ உம் ஆகும்.

உதாரணம் 2

ஏறுவரிசையில் எழுதப்பட்டுள்ள 2, 2, 3, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 11, 11, 12, 12, 15, 15, 16, 17, 20 என்னும் 18 தரவுகளின் காலணைகளைக் காண்க.

2, 2, 3, 6, 6, 6, 7, 8, [8, 11,] 11, 12, 12, 15, 15, 16, 17, 20

இங்கு இடையம் ஆவது கட்டமிடப்பட்டுள்ள தரவுகளாகிய 8, 11 ஆகியவற்றின் இடையமாகும்.

ஆகவே

$$Q_2 = \frac{8 + 11}{2} = 9.5$$

இடையத்தின் இடப்பக்கத்திலுள்ள தரவுப் பகுதி பின்வருமாறு

2, 2, 3, 6, [6,] 6, 7, 8, 8

இதன் இடையமாகிய 6 கட்டமிடப்பட்டுள்ளது.
எனவே $Q_1 = 6$.

இறுதியாக இடையத்தின் இடப்பக்கத்திலுள்ள தரவுப் பகுதி பின்வருமாறு

11, 11, 12, 12, [15,] 15, 16, 17, 20

இதன் இடையமாகிய 15 கட்டமிடப்பட்டுள்ளது.
எனவே $Q_3 = 15$.

உதாரணம் 3

கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுத் தொகுதியில் 17 தரவுகள் உள்ளன. அவற்றின் காலணை களைக் காண்க.

102, 104, 104, 105, 107, 107, 107, 108, 112, 112, 113, 115, 115, 119, 120, 125, 126
மேலே தரப்பட்டுள்ள படிமுறைகளைப் பின்பற்றும்போது பெறப்படும் அம்புக் குறிகளினால் காட்டப்பட்டு காலணைகள் கணிக்கப்பட்டுள்ள முறையைப் புரிந்து கொள்க.

102, 104, 104, $\boxed{105, 107,}$ 107, 107, 108, $\boxed{112,}$ 112, 113, 115, $\boxed{115, 119,}$ 120, 125, 126

↑ ↑ ↑

$Q_1 = \dfrac{105 + 107}{2} = 106$ $\quad Q_2 = 112$ $\quad Q_3 = \dfrac{115 + 119}{2} = 117$

உதாரணம் 4

கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுத் தொகுதியில் 16 தரவுகள் உள்ளன. இங்கு காலணைகள் அமைந்துள்ள இடங்கள் அம்புக்குறிகள் மூலம் காட்டடப்படுகின்றன. காலணைகள் கணிக்கப்பட்டுள்ள முறையை அவதானிக்கவும்.

21, 23, 25, $\boxed{25, 26,}$ 28, 28, $\boxed{30, 30,}$ 34, 34, $\boxed{35, 37,}$ 37, 40, 42

↑ ↑ ↑

இதற்கேற்ப $Q_1 = \dfrac{25 + 26}{2} = 25.5$, $Q_2 = \dfrac{30 + 30}{2} = 30$, $Q_3 = \dfrac{35 + 37}{2} = 36$.

குறிப்பு: ஒரு தரவுக் கூட்டத்தின் காலணைகளைக் காணும் பல முறைகள் புள்ளி விவரவியல் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இங்கு விவரிக்கப்பட்டுள்ள முறையானது பிரயோக ரீதியாக பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படும் முறையாகும்.

தற்போது காலணைகளைக் கணிக்கும் இன்னுமொரு முறையைப் பார்ப்போம்.

$Q_1 = \dfrac{1}{4}(n + 1)$, $Q_2 = \dfrac{2}{4}(n + 1)$, $Q_3 = \dfrac{3}{4}(n + 1)$ சூத்திரங்களை பயன்படுத்தி காலணைகள் அமைந்துள்ள இடங்களை காண்பதாகும்.

உதாரணமாக 4 6 7 8 15 18 20 ஆகிய தரவுகளின் காலணைகளைக் காண்க.

இச்சூத்திரங்களுக்கேற்ப தரப்பட்டுள்ள தரவுக் தொகுதியில்

Q_1 அமைவது $\dfrac{1}{4}(7 + 1) = 2$ ஆம் இடத்திலாகும் இதற்கேற்ப $Q_1 = 6$.

Q_2 அமைவது $\dfrac{2}{4}(7 + 1) = 4$ ஆம் இடத்திலாகும் இதற்கேற்ப $Q_2 = 8$.

Q_3 அமைவது $\dfrac{3}{4}(7 + 1) = 6$ ஆம் இடத்திலாதகும் இதற்கேற்ப $Q_3 = 18$.

மேலுமொரு உதாரணத்தைக் கருதுவோம். 9 12 18 20 21 23 24 26 ஆகிய தரவுகளின் காலணைகளைக் காண்க.
இச்சூத்திரங்களுக்கேற்ப தரப்பட்டுள்ள தரவுக் தொகுதியில்

Q_1 அமைவது $\frac{1}{4}(8+1) = 2.25$ இதற்கேற்ப, $Q_1 = 12 + \frac{1}{4}(18-12) = 13.5$

Q_2 அமைவது $\frac{2}{4}(8+1) = 4.5$ இதற்கேற்ப $Q_2 = \frac{20+21}{2} = 20.5$

Q_3 அமைவது $\frac{3}{4}(8+1) = 6.75$ இதற்கேற்ப $Q_3 = 23 + \frac{3}{4}(24-23) = 23.75$

இங்கு ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்ட முறைகளைப் பயன்படுத்துவதால் சிறிய வேறுபாடுகளுடைய விடைகள் பெறப்படலாம். புள்ளிவிவரவியலில் விடைகளுக்காக கிட்டிய பெறுமானங்கள் பெறப்படுவதால் அவ்வாறு சிறு வேறுபாடுகள் இருப்பது பிரச்சயைக்குரியதல்ல.

ஒரு தரவுத் தொகுதியின் காலணை இடைவீச்சு எனப்படுவது மூன்றாம் காலணையிலிருந்து முதலாம் காலணையைக் கழிக்கும்போது பெறப்படும் பெறுமானமாகும்.

அதாவது **காலணை இடைவீச்சு = $Q_3 - Q_1$**

பயிற்சி 15.4

1. ஒரு வேலைத்தளத்தில் பணியாற்றும் ஊழியர்களின் வயதுகள் (ஆண்டுகள்) முறையே கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

21, 22, 23, 24, 25, 27, 27, 30, 34, 35, 40, 41, 42, 44, 46, 47, 50

இத்தரவுத் தொகுதியின்
(i) இடையம்
(ii) முதலாம் காலணை
(iii) மூன்றாம் காலணை
(iv) காலணை இடைவீச்சு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. ஒரு வகுப்பிலுள்ள பிள்ளைகளின் வீடுகளிலுள்ள உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை பற்றித் திரட்டப்பட்ட தரவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

7, 6, 4, 3, 8, 5, 5, 4, 3, 6, 4, 6, 7, 10, 5

இத்தரவுத் தொகுதியின்
(i) இடையம்
(ii) முதலாம் காலணை
(iii) மூன்றாம் காலணை
(iv) காலணை இடைவீச்சு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. 2015 ஆம் ஆண்டு குறித்த ஒரு தினத்தில் நகரமொன்றில் வியாபாரநிலையங்களில் பயன்படுத்தப்பட்ட மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை பற்றிய தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை	2	3	4	5	6	7	8	10
வியாபார நிலையங்களின் எண்ணிக்கை	5	2	6	6	7	2	3	1

இத்தரவுத் தொகுதியின்
(i) இடையம்
(ii) முதலாம் காலணை
(iii) மூன்றாம் காலணை
(iv) காலணை இடைவீச்சு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

15.4 காலணை இடை வீச்சு மேலும்

நாம் இப்பகுதியில் கற்க எதிர்பார்ப்பது கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளின் காலணை, காலணை இடை வீச்சு என்பவற்றைக் காணும் முறையாகும். திரள் மீடிறன் வளையியைப் பயன்படுத்தி அவற்றைக் காணும் முறை பற்றி மாத்திரம் இங்கு விபரிக்கப்படுகின்றது. கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்திலிருந்து கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளின் காலணை, காலணை இடைவீச்சு ஆகியவற்றைக் காணும் முறையை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

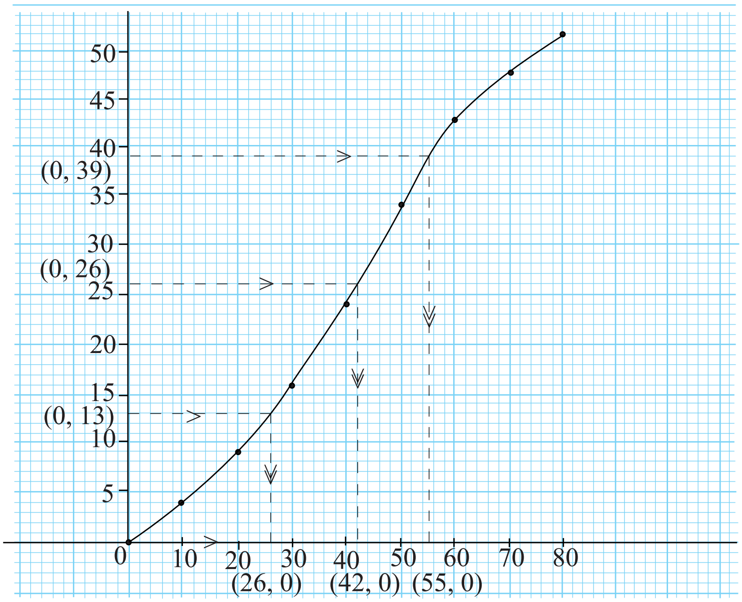
ஒரு தவணைப் பரீட்சையில் தரம் 11 மாணவர் குழுவினர் கணித பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகளிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இம்மீடிறன் பரம்பலுக்கான திரள் மீடிறன் வளையியை வரைவோம்.

வகுப்பாயிடை (புள்ளிகள்)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	4	5	7	8	10	9	5	4

பகுதி 15.3 இல் கற்றவாறு திரள் மீடிறன் வளையியை வரைவோம்.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்	திரள் மீடிறன்
0 - 10	4	4
10 - 20	5	9
20 - 30	7	16
30 - 40	8	24
40 - 50	10	34
50 - 60	9	43
60 - 70	5	48
70 - 80	4	52

அட்டவணையிலுள்ள வரிசைப்பட்ட சோடிகளை ஓர் ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் குறிப்போம்.



மேலேயுள்ள திரள் மீடிறன் வளையியைக் கொண்ட உருவிலுள்ள கிடை மற்றும் நிலைக்குத்துக் கோடுகள் பற்றி இப்போது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

இங்கு மொத்தத் தரவுகளின் எண்ணிக்கை 52 ஆகும். அதாவது மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை 52 ஆகும். முதலில் 52 தரவுகளின் முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம் காலணைகள் அமைந்துள்ள இடங்களைக் கண்டுகொள்ள வேண்டும்.

குறிப்பு:
திரள் மீடிறன் வளையியிலிருந்து காலணைகளைக் காணும்போது மேலே பகுதி 15.3 இல் போன்று வெவ்வேறு சந்தர்ப்பங்களைக் கருதி காலணைகளைக் காண்பது அவசியமற்றதாகும். அதற்கான காரணம் கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகள் பெரிய எண்ணிக்கையில் இருப்பதால் (30 இற்குக் கூடிய எண்ணிக்கை பெரிய எண்ணிக்கை என இங்கு கொள்ளப்படும்) இங்கு மீடிறன்களிலிருந்த $\frac{1}{4}$ ஆம் $\frac{1}{2}$ ஆம் $\frac{3}{4}$ ஆம் அமைவிடங்களைக் கண்டுகொள்வது போதுமானது.

முதலாம் காலணை அமைவது, மீடிறன்களை ஏறுவரிசையில் ஒழுங்கமைக்கும்போது மொத்த மீடிறன்களின் எண்ணிக்கையின் $\frac{1}{4}$ ஆவது மீடிறன் அமைந்துள்ள இடத்திலாகும். இதற்கேற்ப

Q_1 முதலாம் காலணை = $\frac{1}{4} \times 52$ ஆவது இடம் $= 13$ ஆவது இடம்

Q_2 இரண்டாம் காலணை = $\frac{1}{2} \times 52$ ஆவது இடம் $= 26$ ஆவது இடம்

Q_3 மூன்றாம் காலணை = $\frac{3}{4} \times 52$ ஆவது இடம் $= 39$ ஆவது இடம்

இனி மீடிறனைக் குறிக்கும் நிலைக்குத்து அச்சின் மீது 13, 26, 39 ஆகிய புள்ளிகளுக்கு மீடிறன்களுக்கு ஒத்த தரவுகளைத் தேட வேண்டும். அதற்குத் தேவையான கோடுகள் மேலேயுள்ள உருவில் தரப்பட்டுள்ளன. உதாரணமாக முதலாம் காலணை பின்வருமாறு கண்டுகொள்ளப்படும்.

முதலாம் காலணை அமைந்துள்ள இடம் 13 என்பதால் நிலைக்குத்து அச்சின் மீது 13 இலிருந்து ஒரு கிடைக்கோட்டை வரைந்து, அது வளையியை வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு நிலைக்குத்துக் கோடானது கிடை அச்சு வெட்டப்படும் வரை வரையப்படும். அவ்வெட்டுப் புள்ளிக்குரிய பெறுமானம் முதலாம் காலணை ஆகும்.

தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தில் இவ்வாறு காலணைகளைக் காணும்போது $Q_1 = 26$, $Q_2 = 42$, $Q_3 = 55$ பெறப்படும்.

எனவே காலணை இடைவீச்சு $= Q_3 - Q_1 = 55 - 26 = 29$

உதாரணமான கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலின் மொத்த மீடிறன்கள் 51 ஆயின், அப்போது முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம் காலணைகளின் அமைவிடங்கள் முறையே

$\frac{1}{4} \times 51 = 12.75$ ஆம் இடம்.

$\frac{1}{2} \times 51 = 25.5$ ஆம் இடம்.

$\frac{3}{4} \times 51 = 38.25$ ஆம் இடம் என எடுக்க முடியும்.

பின்னர் நிலைக்குத்து அச்சின் மீது 12.75, 25.5, 38.25 ஆகிய பெறுமானங்களுக்கு (அல்லது உங்களது வரைபில் பயன்படுத்திய அளவிடைக்கு ஏற்ப பொருத்தமாக மட்டந்தட்டிப் பெறப்படும் பெறுமானங்களுக்கு) உரியதாக காலணைகளைக் கண்டு கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 15.5

1. ஒரு காரியாலயத்திலிருந்த பணியாளர்கள் 2015 ஆம் ஆண்டு பெற்றுக் கொண்ட விடுமுறைகள் பற்றிய தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

நாட்களின் எண்ணிக்கை	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20	20 - 24
பணியாளர்களின் எண்ணிக்கை	10	18	11	8	5	4

(i) மேற்குறித்த தகவல்களின் திரள் மீடிறன் அட்டவணையை உருவாக்குக.
(ii) அட்டவணையிலிருந்து திரள் மீடிறன் வளையியை வரைக.
(iii) திரள் மீடிறன் வளையியிலிருந்து
  (*a*) பணியாளர்களின் விடுமுறைகளின் இடையப் பெறுமானம்
  (*b*) தரவுகளின் காலணை இடைவீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. ஒரு மாதாந்தப் பரீட்சையில் தரம் 11 மாணவர்கள் விஞ்ஞானப் பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகள் பற்றிய தகவல்கள் ஓர் அட்டவணையில் முன்வைக்கப்பட்டுள்ளன.

புள்ளிகளின் வகுப்பாயிடை	0 - 15	15 - 30	30 - 45	45 - 60	60 - 75	75 - 90
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	6	8	12	20	10	4

(i) அட்டவணையிலுள்ள தகவல்களிலிருந்து ஒரு திரள் மீடிறன் அட்டவணையைத் தயாரிக்க.
(ii) திரள் மீடிறன் வளையியை வரைக.
(iii) திரள் மீடிறன் வளையியிலிருந்து

(*a*) முதலாம் காலணை
(*b*) இரண்டாம் காலணை
(*c*) மூன்றாம் காலணை
ஆகியவற்றைக் காண்க.
(iv) பெற்ற புள்ளிகளின் காலணை இடைவீச்சைக் காண்க.

3. 2015 ஜனவரி மாதத்தில் குறித்தவொரு ஆடைத்தொழிற்சாலை ஊழியர்களின் சம்பளம் தொடர்பான தகவல்கள் கிழே அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. இத்தகவல்களிலிருந்து தரவுகளின் திரள் மீடிறன் வளையியை வரைக. திரள் மீடிறன் வளையியிலிருந்து ஊழியர் ஒருவரின் இடையச் சம்பளத்தையும் காலணை இடை வீச்சையும் காண்க.

ஓர் ஊழியரின் மாதாந்தச் சம்பளம் (ரூ.)	20000 - 20500	20500 - 21000	21000 - 21500	21500 - 22000	22000 - 22500	22500 - 23000	23000 - 23500	23500 - 24000
ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை	8	10	15	18	25	12	9	7

பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு வீடமைப்புத் திட்டத்திலுள்ள வீடுகளில் மின் பாவனைக்காகச் செலுத்தப்படும் மாதக்கட்டணங்களிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஓர் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

மாதக் கட்டணம் (ரூபாயில்)	0 - 200	200 - 400	400 - 600	600 - 800	800 - 1000
வீடுகளின் எண்ணிக்கை	8	14	24	12	6

(i) இத்தகவல்களிலிருந்து திரள் மீடிறன் அட்டவணையொன்றைத் தயாரிக்க.
(ii) இத்தகவல்களுக்குரிய திரள் மீடிறன் வளையியை வரைக.
(iii) இடையத்தைக் காண்க.
(iv) காலணை இடை வீச்சைக் காண்க.

2. ஒரு காரியாலயத்தில் பணியாளர்களின் வயதுகள் பற்றித் திரட்டப்பட்ட தகவல்களிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்று கீழே தரப் பட்டுள்ளது.

வயது (ஆண்டுகளில்)	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60
பணியாளர்களின் எண்ணிக்கை	8	12	14	18	16	6	2	2

தரப்பட்ட கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலின்

(i) வலையுருவரையத்தை வரைக.
(ii) மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.
(iii) திரள் மீடிறன் வளையியை வரைக.
(iv) திரள் மீடிறன் வளையியிலிருந்து காலணையிடை வீச்சைக் காண்க.

3. 100 வீடுகளைக் கொண்ட ஒரு வீடமைப்புத் திட்டத்தில் ஒவ்வொரு வீட்டிலும் பாவித்த நீர் அலகுகள் பற்றிய தகவல்கள் கீழே அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

நீர் அலகுகளின் எண்ணிக்கை	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 - 69	70 - 79
வீடுகளின் எண்ணிக்கை	2	8	35	40	10	5

(i) இத்தகவல்களிலிருந்து வலையுரு வரையத்தையும் மீடிறன் பல்கோணியையும் வரைக.
(ii) ஒரு திரள் மீடிறன் அட்டவணையைத் தயாரிக்க.
(iii) இவ்வட்டவணையிலிருந்து திரள் மீடிறன் வளையியை வரைக.
(iv) இத்தரவுகளின் காலணை இடைவீச்சைக் காண்க.

16 பெருக்கல் விருத்தி

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- எண் தொடர்களிலிருந்து பெருக்கல் விருத்தியை அறிந்துகொள்ளவும்
- ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் n ஆம் உறுப்புக்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தவும்
- ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகைக்கான சூத்திரத்தை பயன்படுத்தவும்
- பெருக்கல் விருத்தி தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

16.1 பெருக்கல் விருத்தி

முதலில் நாம் தரம் 10 இல் கற்ற கூட்டல் விருத்தி தொடர்பாக மீண்டும் நினைவுகூர்வோம். கீழே ஒரு கூட்டல் விருத்தி தரப்பட்டுள்ளது.

5, 7, 9, 11 ...

இங்கு எந்தவோர் உறுப்புக்கும் 2 என்னும் மாறாப் பெறுமானம் கூட்டப்பட்டு அதற்கு அடுத்துள்ள உறுப்பு பெறப்படுகின்றது. அம்மாறாப் பெறுமானம் கூட்டல் விருத்தியின் பொது வித்தியாசம் என அழைக்கப்படுகின்றது.
கீழே தரப்பட்டுள்ள எண் தொடரியை நன்கு அவதானிக்கவும்.

3, 6, 12, 24, 48, 96 ...

இத்தொடரியின் முதலாம் உறுப்பு 3 ஆகும். முதலாம் உறுப்பை 2 ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் இரண்டாம் உறுப்பும் இரண்டாம் உறுப்பை 2 ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் மூன்றாம் உறுப்பும் பெறப்படுகின்றது என்பது தெளிவாகும்.

அதாவது எந்தவோர் உறுப்பும் 2 என்னும் மாறா எண்ணினால் பெருக்கப்பட்டு அதற்கடுத்த உறுப்பு பெறப்படுகின்றது. இவ்வாறான விருத்திகள் **பெருக்கல் விருத்திகள்** எனப்படும். பெருக்கிச் செல்லும் மாறா பெறுமானம் பெருக்கல் விருத்தியின் **பொது விகிதம்** எனப்படும். இதற்கேற்ப, இப்பெருக்கல் விருத்தியின் பொது விகிதம் 2 ஆகும்.இவ்வாறு ஓர் எண் தொடரி தரப்பட்டுள்ளபோது அது பெருக்கல் விருத்தியா எனப் பரீட்சிப்பதற்குப் பின்வருமாறு செய்யலாம். இரண்டாம் உறுப்பை முதலாம் உறுப்பினால் வகுத்துப் பெறப்படும் பெறுமானத்தைக் குறித்துக் கொள்ளவும். மூன்றாம் உறுப்பை இரண்டாம் உறுப்பினால் வகுத்துப் பெறப்படும் பெறுமானத்தைக் குறித்துக் கொள்ளவும். நான்காம் உறுப்பை மூன்றாம் உறுப்பினால் வகுத்துப் பெறப்படும் பெறுமானத்தைக் குறித்துக் கொள்ளவும். இவ்வாறு செய்து கொண்டு செல்லும்போது ஒரே பெறுமானம் குறிக்கப்படுமாயின் அது பெருக்கல் விருத்தியாகும். அவ்வாறு பெறப்படும் பெறுமானம் **பொதுவிகிதம்** என நீங்கள் விளங்கிக் கொள்வீர்கள்.

உதாரணம் 1

2, 6, 18, 54, ... என்னும் தொடரி ஒரு பெருக்கல் விருத்தியா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

$$\frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{18}{6} = 3, \qquad \frac{54}{18} = 3$$

$$\therefore \quad \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3$$

$\therefore$ மேற்குறித்த எண் தொடரி ஒரு பெருக்கல் விருத்தியாகும். மேலும் அதன் பொது விகிதம் 3 ஆகும்.

உதாரணம் 2

200, 100, 50, 20, ... என்னும் தொடரி ஒரு பெருக்கல் விருத்தியா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

$$\frac{100}{200} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

எல்லாச் சந்தர்ப்பங்களிலும் மாறாப் பெறுமானம் பெறப்படாததால் இது ஒரு பெருக்கல் விருத்தி அல்ல.

உதாரணம் 3

5, –10, 20, –40, 80, ... என்னும் தொடரி ஒரு பெருக்கல் விருத்தியா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

$$\frac{-10}{5} = -2, \qquad \frac{20}{-10} = -2, \qquad \frac{-40}{20} = -2, \qquad \frac{80}{-40} = -2$$

$$\therefore \quad \frac{-10}{5} = \frac{20}{-10} = \frac{-40}{20} = \frac{80}{-40} = -2$$

$\therefore$ இவ்வெண் தொடரியானது பொதுவிகிதம் -2 ஐ உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியாகும்.

உதாரணம் 4

4, x, 16 ஆகிய மூன்று உறுப்புகளும் ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் அடுத்துள்ள உறுப்புகளாயின் x இன் பெறுமானம் காண்க.

பெருக்கல் விருத்தியில் அமைவதால் $\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$ ஆகும். இச்சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதன் மூலம் தேவையான x இன் பெறுமானம் பெறப்படும்.

$\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$ எனின் $x^2 = 64$.

அதாவது $\qquad x^2 - 8^2 = 0$

அதாவது $(x - 8)(x + 8) = 0$
அதாவது $x = 8$ அல்லது $x = -8$
இனி இவ்வொவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் 4, x, 16 ஆகிய மூன்று உறுப்புகளும் ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் அமைகின்றனவா எனப் பார்ப்போம்.

$x = 8$ ஆகும்போது 4, 8, 16 என்பது பொது விகிதம் 2 ஐக் கொண்ட பெருக்கல் விருத்தியாகும்.
$x = -8$ ஆகும்போது 4, – 8, 16 என்பது பொது விகிதம் – 2 ஐக் கொண்ட பெருக்கல் விருத்தியாகும்.
∴ இவ்விரண்டு விருத்திகளும் பெருக்கல் விருத்தியில் அமைகின்றன.
∴ $x = -8$ அல்லது $x = +8$ ஆகும்.

பயிற்சி 16.1

1. கிழே தரப்பட்டுள்ள எண் தொடரிகளிலிருந்து பெருக்கல் விருத்திகளைத் தெரிந்து எழுதுக.

(a) 2, 4, 8, ... **(b)** – 6, – 18, – 54, ... **(c)** 64, 32, 16, 8, ...

(d) 5, 10, 30, 120, ... **(e)** – 2, 6, – 18, 54, ... **(f)** 81, 27, 3, $\frac{1}{9}$, ...

(g) 0.0002, 0.002, 0.02, 0.2, ... **(h)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}, \frac{1}{72}, ...$

16.2 ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் n ஆம் உறுப்பு

முதலாம் உறுப்பு a ஆகவும் பொது வித்தியாசம் d ஆகவும் உள்ள ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் n ஆம் உறுப்பை $T_n = a + (n - 1)d$ என எழுதலாமென நீங்கள் தரம் 10 இல் கற்றீர்கள். ஒரு பெருக்கல் விருத்தயின் n ஆம் உறுப்பிற்கு ஒரு சூத்திரத்தைப் பெற்றுக்கொள்ளும் முறையில் இப்போது கவனம் செலுத்துவோம்.

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதலாம் உறுப்பை a எனவும் அதன் பொது விகிதத்தை r எனவும் குறியீடுகளினால் எழுதுவோம். மேலும் n ஆம் உறுப்பை T_n என எழுதுவோம். ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் n இற்கான ஒரு சூத்திரத்தைப் பெற்றுக்கொள்ளும் முறையைக் கவனிப்போம்.

2, 6, 18, 54, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியைக் கருதுவோம். இப்பெருக்கல் விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பு (a) 2 உம் பொது விகிதம் (r) 3 உம் ஆகும்.
அப்போது
$$T_1 = 2 = 2 \times 1 = 2 \times 3^{1-1}$$
$$T_2 = 6 = 2 \times 3 = 2 \times 3^{2-1}$$
$$T_3 = 18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^{3-1}$$
$$T_4 = 54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^{4-1}$$

என எழுத முடியும் என்பதை நன்கு அவதானிக்கவும். அவ்வுறுப்புகளை, முதலாம் உறுப்பு (a) பொது விகிதம் (r) என்பவற்றின் சார்பில் தரும்போது

$$T_1 = 2 \times 3^0 = a \times r^{1-1}$$
$$T_2 = 2 \times 3^1 = a \times r^{2-1}$$
$$T_3 = 2 \times 3^2 = a \times r^{3-1}$$
$$T_4 = 2 \times 3^3 = a \times r^{4-1}$$ என எழுதலாம்.

இக்கோலத்திற்கேற்ப n ஆம் உறுப்பை $T_n = ar^{n-1}$ என எழுத முடியும் என்பதை அவதானிக்கவும்.

முதலாம் உறுப்பு a ஆகவும் பொது விகிதம் r ஆகவுள்ள ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் n ஆம் உறுப்பு $T_n = ar^{n-1}$ இனால் தரப்படும்.

உதாரணம் 1

முதலாம் உறுப்பு 3 உம் பொது விகிதம் 2 உம் ஆகவுள்ள ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 5 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

$$a = 3, \ r = 2, n = 5$$

$$\therefore \ T_5 = ar^{n-1}$$
$$= 3 \times 2^{5-1}$$
$$= 3 \times 2^4$$
$$= 3 \times 16$$
$$= 48$$

எனவே 5 ஆம் உறுப்பு 48 ஆகும்.

உதாரணம் 2

81, 27, 9, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியில் ஐந்தாம் உறுப்பையும் ஏழாம் உறுப்பையும் காண்க

$$a = 81$$
$$r = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$
$$T_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore \ T_5 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} \quad , \quad T_7 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$$
$$= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \quad \quad = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6$$
$$= 81 \times \frac{1}{81} \quad \quad = 81 \times \frac{1}{729}$$
$$= 1 \quad \quad = \frac{1}{9}$$

எனவே ஐந்தாம் உறுப்பு 1 உம் ஏழாம் உறுப்பு $\frac{1}{9}$ உம் ஆகும்.

பயிற்சி 16.2

1. முதலாம் உறுப்பு 5 உம் பொது விகிதம் 2 உம் ஆகவுள்ள ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 6 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

2. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதலாம் உறுப்பு 4 உம் பொது விகிதம் – 2 உம் ஆகவுள்ள பெருக்கல் விருத்தியின் 6 ஆம் உறுப்பையும் 8 ஆம் உறுப்பையும் காண்க.

3. முதலாம் உறுப்பு –2 உம் பொது விகிதம் –3 உம் ஆகவுள்ள ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 4 ஆம் உறுப்பையும் 7 உறுப்பையும் காண்க.

4. முதலாம் உறுப்பு 1000 உம் பொது விகிதம் $\frac{1}{5}$ உம் உடைய பெருக்கல் விருத்தியில் 6 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

5. 0.0002, 0.002, 0.02,... என்னும் விருத்தியில் 5 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

6. $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{2},...$ என்னும் விருத்தியில் 7 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

7. 75, – 30, – 12,... என்னும் விருத்தியில் 4 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

8. 192, 96, 48,... என்னும் விருத்தியில் 7 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

9. 0.6, 0.3, 0.15,... என்னும் விருத்தியில் 9 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

10. 8, 12, 18,... என்னும் விருத்தியில் 10 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

16.3 $T_n = ar^{n-1}$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தல்

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதலாம் உறுப்பு (a), பொது விகிதம் (r), n ஆம் உறுப்பு T_n, n ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களில் ஒன்றைத் தவிர மற்றைய பெறுமானங்கள் தரப்பட்டுள்ளபோது அப்பெறுமானங்களை $T_n = ar^{n-1}$ என்னும் சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டுத் தரப்படாத பெறுமானத்தைக் காணலாம்.

இதற்காக சில உதாரணங்களைக் கவனத்தில் கொள்வோம்.

உதாரணம் 1

பொதுவிகிதம் 3 உம் 4 ஆம் உறுப்பு 54 உம் ஆகவுள்ள பெருக்கல் விருத்தியில் முதலாம் உறுப்பைக் காண்க.

$$r = 3,\ n = 4,\ T_n = 54$$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore\ T_4 = a \times (3)^{4-1}$$
$$\therefore\ 54 = a \times (3)^3$$
$$\therefore\ 54 = a \times 27$$
$$\therefore\ a = \frac{54}{27}$$
$$= 2$$

விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பு 2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

முதலாம் உறுப்பு 5 உம் 7 ஆம் உறுப்பு 320 உம் ஆகவுள்ள பெருக்கல் விருத்தியில் பொதுவிகிதத்தைக் கண்டு அதன் முதல் 5 உறுப்புகளையும் காண்க.

$$a = 5,\ n = 7,\ T_7 = 320$$
$$T_n = ar^{(n-1)}$$
$$T_7 = 5 \times (r)^{7-1}$$
$$\therefore\ 320 = 5 \times (r)^6$$
$$\therefore\ r^6 = \frac{320}{5}$$
$$= 64$$
$$= (+2)^6 \text{ அல்லது } (-2)^6$$
$$\therefore\ r = 2 \text{ அல்லது } -2$$

பொது விகிதத்திற்கு இரண்டு பெறுமானங்கள் கிடைப்பதால் மேற்குறித்த தேவைகளுக்குப் பொருத்தமான இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன.
$r = 2$ ஆகவுள்ள விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகள் 5, 10, 20, 40, 80 ஆகும்
$r = -2$ ஆகவுள்ள விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகள் 5, –10, 20, –40, 80 ஆகும்.

உதாரணம் 3

முதலாம் உறுப்பு 64 உம் பொதுவிகிதம் $\frac{1}{4}$ உம் ஆகவுள்ள விருத்தியில் $\frac{1}{64}$ எத்தனையாம் உறுப்பாகும்.

$$a = 64,\ n = \frac{1}{4},\ T_n = \frac{1}{64}$$
$$T_n = ar^{n-1}$$
$$ar^{(n-1)} = \frac{1}{64}$$
$$64 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{64}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{64 \times 64}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{4^6}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \left(\frac{1}{4}\right)^6$$

$$(n-1) = 6$$

$$n = 6 + 1$$

$$= 7$$

$\therefore \quad \frac{1}{64}$ என்பது மேற்குறித்த பெருக்கல் விருத்தியின் 7 ஆம் உறுப்பாகும்.

உதாரணம் 4

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பு 160 உம் 6 ஆம் உறுப்பு 1215 உம் ஆகும். இவ்விருத்தியின் பொது விகிதத்தைக் காண்க.

$$a = 160, \; T_6 = 1215, n = 6$$

$$T_n = ar^{(n-1)}$$

$$1215 = 160\,(r)^{6-1}$$

$$160r^5 = 1215$$

$$\therefore \quad r^5 = \frac{1215}{160}$$

$$= \frac{243}{32}$$

$$= \frac{3^5}{2^5}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$\therefore \; r = \frac{3}{2}$$

$$= 1\frac{1}{2}$$

$\therefore$ விருத்தியின் பொது விகிதம் $1\frac{1}{2}$ ஆகும்.

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் யாதாயினும் இரண்டு உறுப்புகளின் பெறுமானங்கள் சூத்திரம் $T_n = ar^{n-1}$ ஐப் பயன்படுத்தி தரப்பட்டுள்ளபோது முதலாம் உறுப்பையும் பொது விகிதத்தையும் காணலாம். அவ்வாறன ஓர் உதாரணத்தை இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணம் 5

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 3 ஆம் உறுப்பு 48 உம் 6 ஆம் உறுப்பு 3072 உம் ஆகும். விருத்தியின் பொது விகிதத்தையும் முதலாம் உறுப்பையும் காண்க.

முதலில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து இரண்டு சமன்பாடுகளை உருவாக்குவோம்.

$$T_n = ar^{n-1}$$
$$T_3 = ar^{(3-1)}$$
$$ar^2 = 48 \text{ ——— ①}$$
$$T_6 = ar^{(6-1)}$$
$$ar^5 = 3072 \text{ ——— ②}$$

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளில் a, r ஆகிய இரண்டு மாறிகளும் உள்ளன. அதிலிருந்து மாறி a ஐ நீக்குதல் இலகுவானதாகும். அதற்காக இரண்டு சமன்பாடுகளையும் வகுப்போம்.

② ÷ ①
$$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{3072}{48}$$
$$r^3 = 64$$
$$r^3 = 4^3$$
$$r = 4$$

$r = 4$ ஐ ① இல் பிரதியிடுவதால்

$$ar^2 = 48$$
$$a\,(4)^2 = 48$$
$$16a = 48$$
$$a = \frac{48}{16}$$
$$a = 3$$

விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பு $= 3$ உம்
பொது விகிதம் $= 4$ உம் ஆகும்.

உதாரணம் 6

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 6 ஆம் உறுப்பு -8 உம் 10 ஆம் உறுப்பு -128 உம் ஆகும்.
(i) இப்பெறுமானங்களுக்குப் பொருத்தமான இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன எனக் காட்டுக.
(ii) ஒவ்வொரு விருத்தியிலும் முதல் 5 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

(i)
$$T_n = ar^{(n-1)}$$
$$T_6 = ar^{(6-1)}$$
$$ar^5 = -8 \text{ ——— ①}$$
$$T_{10} = ar^{(10-1)}$$
$$ar^9 = -128 \text{ ——— ②}$$

② ÷ ①

$$\frac{ar^9}{ar^5} = \frac{-128}{-8}$$

$$r^4 = 16$$

$$r^4 = 2^4 \text{ அல்லது } (-2)^4$$

$$r = 2 \text{ அல்லது } -2$$

பொது விகிதத்திற்கு இரண்டு பெறுமானங்கள் கிடைப்பதால் இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன.

(ii) $r = 2$, ஐ ① இல் பிரதியிடுவதால்

$$ar^5 = -8$$

$$a(2)^5 = -8$$

$$a \times 32 = -8$$

$$a = \frac{-8}{32}$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$r = 2$, $a = -\frac{1}{4}$ ஆகவுள்ள பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 5 உறுப்புகளும் $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, -1, -2, -4 ஆகும்.

$r = -2$ ஐ ① இல் பிரதியிடுவதால்

$$ar^5 = -8$$

$$a(-2)^5 = -8$$

$$a \times (-32) = -8$$

$$a = \frac{-8}{-32}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$r = -2$, $a = \frac{1}{4}$ ஆகவுள்ள பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 5 உறுப்புகளும் $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, 1, -2, 4 ஆகும்.

பயிற்சி 16.3

1. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் பொது விகிதம் 3 உம் 4 ஆம் உறுப்பு 108 உம் ஆகும். விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பைக் காண்க.

2. 6 ஆம் உறுப்பு 1701 உம் பொது விகிதம் 3 உம் உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பைக் காண்க.

3. பொது விகிதம் $\frac{1}{2}$ உம் 8 ஆம் உறுப்பு 96 உம் உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பைக் காண்க.

4. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் உறுப்பு 5 உம் 4 ஆம் உறுப்பு 135 உம் ஆகும். விருத்தியின் பொது விகிதத்தைக் காண்க.

5. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதலாம் உறுப்பு 7 உம் பொதுவிகிதம் 2 உம் ஆகும். 448 இவ்விருத்தியின் எத்தனையாம் உறுப்பாகும்.

6. முதலாம் உறுப்பு $\frac{1}{32}$ உம் பொது விகிதம் 2 உம் உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 256 எத்தனையாம் உறுப்பாகும்?

7. முதலாம் உறுப்பு 27 உம் பொது விகிதம் $\frac{2}{3}$ உம் உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் $3\frac{5}{9}$ எத்தனையாம் உறுப்பாகும்?

8. முதலாம் உறுப்பு 8 உம் 6 ஆம் உறுப்பு $-$ 256 உம் உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

9. முதலாம் உறுப்பு 64 உம் 9 ஆம் உறுப்பு $\frac{1}{4}$ உம் உடைய இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன எனக் காட்டி அவ்வொவ்வொரு விருத்தியிலும் முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.

10. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 4 உம் உறுப்பு 48 உம் 7 ஆம் உறுப்பு 384 உம் ஆகும். விருத்தியின் பொது விகிதத்தையும் முதலாம் உறுப்பையும் காண்க.

11. 3 ஆம் உறுப்பு -45 உம் ஐந்தாம் உறுப்பு -1125 உம் உடைய இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன எனக் காட்டுக.

12. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 4 ஆம் உறுப்பு 100 உம் 9 ஆம் உறுப்பு $3\frac{1}{8}$ உம் ஆகும். விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

13. ஐந்தாம் உறுப்பு 40 உம் 9 ஆம் உறுப்பு 640 உம் உடைய இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன எனக் காட்டி, ஒவ்வொரு விருத்தியிலும் முதல் 5 உறுப்புகளை எழுதுக.

16.4 ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

முதலாம் உறுப்பு a உம் பொது விகிதம் r உம் உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S_n இற்கான ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்கும் முறைபற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

$$T_1 = a,\ T_2 = ar,\ T_3 = ar^2,\ T_4 = ar^3,\ ....,\ T_n = ar^{(n-1)}$$

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + ... + T_n$$

$\therefore\ S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots\dots\dots + ar^{(n-1)}$ ——① என எழுத முடியும்.

S_n இற்கான சூத்திரத்தை உருவாக்கும்போது பயன்படுத்தப்படும் வழிமுறை பின்வருமாறாகும். முதலில் சமன்பாடு ① இன் இருபக்கங்களையும் r இனால் பெருக்குவோம். அப்போது

$r S_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots\dots\dots + ar^n$ ——② என்பது கிடைக்கும்.

இனி, சமன்பாடு ② இலிருந்து சமன்பாடு ① ஐக் கழிப்போம். அப்போது

$r S_n - S_n = ar^n - a$ (வலது கைப் பக்கத்தில் எஞ்சிய உறுப்புகள் கழிக்கப்பட்டு விடுகின்றன என்பதை அவதானிக்க.)

$$S_n (r-1) = a(r^n - 1)$$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \qquad (r \neq 1)$$

இது a, r, n, S_n ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ள ஒரு சூத்திரமாகும். இச்சூத்திரத்தின் பகுதியையும் தொகுதியையும் -1 இனால் பெருக்குவதன் மூலம் சூத்திரத்தை வேறொரு வடிவில் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

S_n இற்கு $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{(r-1)}$, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{(1-r)}$ ஆகிய

இரண்டு சந்தர்ப்பங்களில் எந்தவொன்றையும் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம் 1

2, 6, 18, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 5 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையை, உறுப்புகளைக் கண்டு கூட்டுவதன் மூலமும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலமும் வேறு வேறாகக் காண்க.

முதலில் உறுப்புகளைக் கண்டு கூட்டி கூட்டுத்தொகையைக் கணிப்போம்.

$T_1 = 2,\ T_2 = 6\ ,\ T_3 = 18$ எனத் தரப்பட்டுள்ளன.

மேலும்.

$T_4 = 18 \times 3 = 54$ உம்

$T_5 = 54 \times 3 = 162$ உம் ஆகும்.

எனவே $S_5 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$

$= 2 + 6 + 18 + 54 + 162$

$= 242$

இனி $S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{(r - 1)}$ சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கூட்டுத்தொகையைக் காண்போம்.

$a = 2,\ r = \frac{6}{2} = 3,\ n = 5$ என்பதால்,

$$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{2\,(3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_n = \frac{2\,(243 - 1)}{2}$$

$$S_n = \frac{2 \times 242}{2}$$

$$S_n = 242$$

முதல் 5 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 242 ஆகும்.

உறுப்புகளின் பெறுமானங்கள் பெரியனவாக உள்ளபோது அல்லது உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பெரியதாக உள்ளபோது சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவது மிக இலகுவானதாகும்.

உதாரணம் 2

120, – 60, 30, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. அதற்காக சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

$a = 120,\ r = \frac{-60}{120} = -\frac{1}{2},\ n = 6$ என்பதால்

$S_6 = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}$ இல் பிரதியிடுவதால்

$$S_6 = \frac{120\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$S_6 = \frac{120\left[1 - \left(\frac{1}{64}\right)\right]}{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$S_6 = \left[120 \times \frac{63}{64}\right] \div \frac{3}{2}$$

$$S_6 = \left[120 \times \frac{63}{64}\right] \times \frac{2}{3}$$

$$S_6 = \frac{315}{4}$$

$$S_6 = 78\frac{3}{4}$$

முதல் ஆறு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $78\frac{3}{4}$ ஆகும்.

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ சூத்திரத்தில் நான்கு மாறிகள் உண்டு. அவை a, r, n, S_n என்பவையாகும். இம்மாறிகளில் ஏதேனும் மூன்று தரப்படும்போது எஞ்சிய பெறுமானத்தைக் காணலாம். இனி, அவ்வாறான ஓர் உதாரணத்தை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 3

5, 15, 45,... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் உறுப்பிலிருந்து கூட்டுத்தொகை 1820 ஆவதற்கு கூட்டப்பட வேண்டிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

$$a = 5,\ r = \frac{15}{5} = 3,\ S_n = 1820$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$1820 = \frac{5(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$1820 = \frac{5(3^n - 1)}{2}$$

$$2 \times 1820 = 5(3^n - 1)$$

$$\frac{2 \times 1820}{5} = 3^n - 1$$

$$728 = 3^n - 1$$

$$1 + 728 = 3^n$$

$$729 = 3^n$$

$$3^6 = 3^n$$

$$n = 6$$

கூட்டப்பட வேண்டிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 6 ஆகும்.

பயிற்சி 16.4

1. முதல் உறுப்பு 4, பொது விகிதம் 3 ஆகவுள்ள ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 5 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையை, உறுப்புகளைக் கண்டு கூட்டுவதன் மூலமும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியும் காண்க.

2. 2, 8, 32, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 5 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

3. முதலாம் உறுப்பு 72 உம் பொது விகிதம் $\frac{1}{3}$ உம் உள்ள பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

4. 3, – 6, 12, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் 7 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

5. 18, 12, 8, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

6. 18, 6, 2, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $26\frac{26}{27}$ எனக் காட்டுக.

7. 2, 4, 8, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியில் குறித்த முதல் உறுப்புகள் சிலவற்றின் கூட்டுத்தொகை 2046 ஆயின் அவ்வுறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

8. முதலாம் உறுப்பு 4 உம் பொதுவிகிதம் 2 உம் ஆகவுள்ள பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 1020 ஆவதற்கு கூட்டப்பட வேண்டிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

9. 3, – 12, 48 என்னும் பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 9831 ஆவதற்கு கூட்டவேண்டிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

16.5 பெருக்கல் விருத்தி தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

பெருக்கல் விருத்தி தொடர்பாக மேற்குறித்த உதாரணங்களின் மூலம் கலந்துரையாடாத வகையிலான பிரசினங்களைத் தீர்க்கும் முறையை சில உதாரணங்களின் மூலம் இப்போது கவனிப்போம்.

உதாரணம் 1

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதலாம் இரண்டாம் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 9 ஆகும். 4 ஆம் 5 ஆம் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை – 72 ஆகும். விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகளை எழுதுக.

$T_1 = a,\ T_2 = ar$

$$a + ar = 9$$

$$a(1 + r) = 9 \quad \text{———} \ ①$$

$T_4 = ar^3,\ T_5 = ar^4$

$$ar^3 + ar^4 = -72$$

$$ar^3(1 + r) = -72 \quad \text{———} \ ②$$

② ÷ ①
$$\frac{ar^3(1 + r)}{a(1 + r)} = \frac{-72}{9}$$

$$r^3 = -8$$

$$r^3 = (-2)^3$$

$$r = -2$$

$r = -2$, ① இல் பிரதியிடுவதால்

$$a[1 + (-2)] = 9$$

$$a \times (-1) = 9$$

$$a = -9$$

விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகளும் –9, 18, –36, 72, –144 ஆகும்.

உதாரணம் 2

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் மூன்று உறுப்புகளும் முறையே $(x + 2)$, $(x + 12)$, $(x + 42)$ ஆகும். பெருக்கல் விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பையும் பொது விகிதத்தையும் காண்க.

$$r = \frac{x + 12}{x + 2} = \frac{x + 42}{x + 12}$$

$$\frac{x + 12}{x + 2} = \frac{x + 42}{x + 12}$$

$$(x + 12)(x + 12) = (x + 2)(x + 42)$$

$$x^2 + 24x + 144 = x^2 + 44x + 84$$

$$144 - 84 = 20x$$

$$60 = 20x$$

$$x = \frac{60}{20}$$

$$x = 3$$

விருத்தியின் முதல் மூன்று உறுப்புகள்

$(3 + 2), (3 + 12), (3 + 42)$

$5, 15, 45$

விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பு $= 5$

விருத்தியின் பொது விகிதம் $= \frac{45}{15}$

$= 3$

பயிற்சி 16.5

1. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் இரண்டாம், மூன்றாம் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 21 உம் ஐந்தாம் ஆறாம் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 168 உம் ஆகும். விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

2. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் மூன்று உறுப்புகளும் முறையே $4, (x + 3), (x + 27)$ ஆகும்.

(i) x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களுக்குப் பொருத்தமான இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன எனக் காட்டி ஒவ்வொரு விருத்தியினதும் முதல் 4 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

3. ஒரு விருத்தியின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $4(3^n - 1)$ ஆகும்.

(i) விருத்தியானது ஒரு பெருக்கல் விருத்தி எனக் காட்டுக.

(ii) அதன் முதல் 4 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

4. ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் முதலாம், மூன்றாம், ஆறாம் உறுப்புகள் ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் 3 உறுப்புகளாகும். கூட்டல் விருத்தியின் 5 ஆம் உறுப்பு 15 ஆயின், பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் 4 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

5. ஒரு விருத்தியின் n ஆம் உறுப்பு $3(2)^{n+1}$ ஆகும்.

(i) விருத்தியானது ஒரு பெருக்கல் விருத்தி எனக் காட்டுக.

(ii) விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பையும் பொது விகிதத்தையும் காண்க.

6. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பு 9 ஆகும். முதல் மூன்று உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 7 ஆகும்.

(i) இப்பெறுமானங்களுக்குப் பொருத்தமான இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன எனக் காட்டுக.

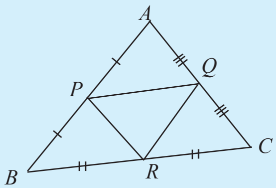
(ii) ஒவ்வொரு விருத்தியிலும் முதல் 4 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

மீட்டற் பயிற்சி - 2

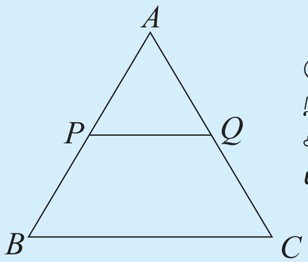
பகுதி I

1. $5, 3, 7, 13, 11, 9, 7, 10, 2, 3, 7$ என்னும் கூட்டத்தின்

   (i) ஆகாரம் (ii) இடையம் (iii) இடை (iv) காலணை இடைவீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.



2. முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவு 24 cm ஆயின் முக்கோணி PQR இன் சுற்றளவு யாது?



3. முக்கோணி ABC இல் AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் P, Q உம் ஆகும். முக்கோணி APQ இன் சுற்றளவு 21 cm எனின், முக்கோணி ABC இன் சுற்றளவு யாது?

4. பங்குச் சந்தையில் கொடுக்கல்வாங்கல் செய்யும் ஒருவர், குறித்த ஒரு நிறுவனத்தின் பங்குகளை பங்கொன்றின் சந்தை விலை ரூ. 50 ஆக உள்ளபோது வாங்கினார். பின்னர் அப்பங்கொன்றின் விலை ரூ. 58 ஆகும்போது அவர் அப்பங்குகளை விற்றார். இப்பங்கு கொடுக்கல் வாங்கலில் முதலீட்டாளர் பெற்ற இலாபத்தை மூலதன இலாபச் சதவீதமாகக் காட்டுக.

5. வரதன் உடன் காசுக்கு ரூ. 15 000 ஆகவுள்ள ஒரு பொருளை முதலில் 3000 செலுத்தி குறைந்து செல்லும் நிலுவை முறையில் வாங்கினார். எஞ்சிய பணத்தை மாதமொன்றுக்கு ரூ. 1464 வீதமான சமனான 10 மாதத் தவணைகளில் செலுத்தி கடனிலிருந்து மீண்டார். பொருளுக்குச் செலுத்தப்பட்டுள்ள மொத்தப் பணத்தைக் காண்க.

6. $x^2 - ax + 18 = 10$ இன் ஒரு மூலம் $x = 2$ ஆயின்,

   (i) a இன் பெறுமானம் காண்க.

   (ii) சமன்பாட்டின் மற்றைய மூலத்தைக் காண்க.

7. $(x-2)^2 = x-2$ ஆயின் x இன் தீர்வுகளைக் காண்க.

8. தீர்க்க. $3x^2 - 27 = 0$

9. அடுத்துள்ள இரண்டு நேர் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 145 ஆகும் அவ்விரண்டு எண்களையும் காண்க.

10. $y = x^2 + 6x + 5$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரையாது
(i) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு
(ii) சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம்
ஆகியவற்றைக் காண்.

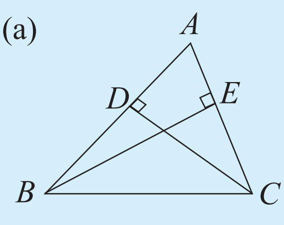
11. $y = (x-2)(x+1)$ என்னும் சார்பானது x அச்சை இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

12. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}$, $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}$ ஆயின் x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

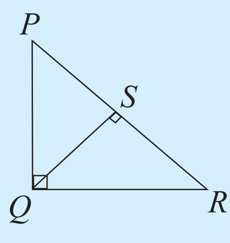
13. $T_n = 2 \times 3^n$ என்பதின் மூலம் காட்டப்படுவது எவ்வகையான தொடர் என்பதை காரணங்களுடன் காட்டுக.

14. முக்கோணி ABC இல் $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 4$ cm ஆகும். X என்பது பக்கம் BC யின் மீது அமைந்துள்ள நிலையான ஒரு புள்ளி ஆகும். AX இன் நடுப்புள்ளி P ஆயின் P இன் ஒழுக்கை விபரிக்க.

15. (a)



(b)



உருவிற்கேற்ப
(i) இல் ABE, ADC ஆகிய முக்கோணிச் சோடி
(ii) இல் PQS, QSR ஆகிய முக்கோணிச் சோடி
இயல்பொத்தவை எனக் காட்டுக.

பகுதி II

1. ஒரு செவ்வகத்தின் நீளத்தை 6 அலகுகளினால் குறைத்து, அகலத்தை 2 அலகுகளினால் அதிகரித்தபோது அதன் பரப்பளவு முன்னைய பரப்பளவிலும் 12 சதுர அலகுகளினால் குறைகிறது. செவ்வகத்தின் முன்னைய நீளம், அகலம் ஆகியவற்றை முறையே x, y எனக் கொண்டு

   (i) இரண்டாம் செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் ஆகியவற்றை x, y என்பவற்றின் சார்பில் தருக.
   (ii) இரண்டாம் செவ்வகத்தின் பரப்பளவை x, y என்பவற்றின் சார்பில் தருக.
   (iii) x, y ஆகியவற்றிலான ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்குக.
   (iv) முன்னைய செவ்வகத்தின் நீளமானது அதன் அகலத்தின் மூன்று மடங்கு எனக் காட்டுக.
   (v) முன்னைய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு 192 சதுரஅலகுகள் எனின், அதன் நீளம், அகலம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. பொதுவிகிதம் நேர்பெறுமானமாகவுடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில், மூன்றாம் உறுப்பு இரண்டாம் உறுப்பிலும் 3 கூடியது. ஐந்தாம் உறுப்பு நான்காம் உறுப்பிலும் 12 கூடியதும் ஆகும்.
   (i) விருத்தியின் பொதுவிகிதம், முதலாம் உறுப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.
   (ii) விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகளையும் எழுதுக.
   (iii) விருத்தியின் n ஆம் உறுப்பு $3 \times 2^{n-2}$ எனக் காட்டுக.

3. பங்குசந்தையில் பணத்தை முதலீடு செய்யும் ஒருவர், பங்கிலாபமாக வருடாந்தம் ஒரு பங்குக்கு ரூ. 1.25 வீதம் வழங்கும் A என்னும் நிறுவனத்தில் 5000 பங்குகளை வாங்கவும் வருடாந்தம் ஒரு பங்குக்கு ரூ. 1.50 வீதம் வழங்கும் B என்னும் நிறுவனத்தில் குறித்த ஒரு தொகைப் பங்குகள் வாங்கவும் பணத்தை முதலீடு செய்கின்றார். A, B ஆகிய நிறுவனங்களின் பங்குகளின் சந்தை விலை முறையே ரூ. 30, ரூ. 35 ஆகவுள்ள ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் அவருக்கிருந்த அந்நிறுவனங்களின் சகல பங்குகளையும் விற்று ஒரு பங்குக்கு ரூ. 2.50 வீதம் வழங்கும் C என்னும் நிறுவனத்தில் பங்குகளை ரூ. 50 வீதம் வாங்கினார் அதன் மூலம் அவரது பங்கிலாப வருமானம் ரூ. 12 750 ஆகியது.

   (i) நிறுவனம் B யில் அவருக்கிருந்த பங்குளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
   (ii) புதிய முதலீட்டின் மூலம் அவரது வருடாந்த பங்கிலாப வருமானம் ரூ. 2000 இனால் அதிகரித்துள்ளது எனக் காட்டுக.

4. ஒருவர் 8% வருட தொடர் வட்டி வீதத்தில் இரண்டு ஆண்டுகளில் செலுத்தி முடிக்கும் ஒப்பந்தத்தில் ரூ. 10 000 கடனாகப் பெற்றார். ஆயினும் அவரால் இரண்டு ஆண்டுகளின் முடிவில் ஒப்பந்தக் கடனைச் செலுத்தி முடிக்க முடியாமற் போனது. கடன் வழங்குனருக்கு இரண்டு ஆண்டுகளின் முடிவில் ரூ. 6 000 ஐ செலுத்திய அவர் மேலும் ஓர் ஆண்டில் வட்டியுடன் கடனை செலுத்தி முடிக்கவும் ஒப்பந்தம் செய்த வட்டியிலும் கூடிய வட்டியை அவ்வாண்டுக்கு செலுத்தவும் கடன் வழங்குனரை உடன்படச் செய்தார்.

(i) முதலாம் ஆண்டு முடிவில் அவர் செலுத்த வேண்டிய வட்டியைக் கணிக்க.

(ii) இரண்டாம் ஆண்டு முடிவில் கடனிலிருந்து மீள்வதற்குச் செலுத்திய மொத்தப் பணத்தைக் காண்க.

(iii) மூன்றாம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் செலுத்த எஞ்சியிருக்கும் பணம் யாது?

(iv) மூன்றாம் ஆண்டு முடிவில் ஒப்பந்தப்படி 6230.40 செலுத்திக் கடனிலிருந்து மீண்டாரெனின் மூன்றாம் வருடம் செலுத்தியுள்ள வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

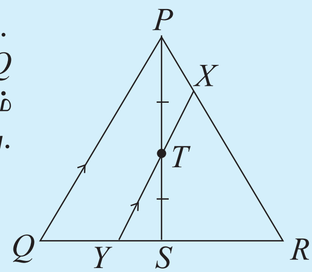
5. இணைகரம் $ABCD$ இல் AC இற்குச் சமாந்தரமாக B இனூடாக வரையப்பட்ட கோடானது நீட்டப்பட்ட பக்கம் DC ஐ E இல் சந்திக்கின்றது. AE, BC ஆகிய கோடுகள் P இலும் AC, BD ஆகிய மூலை விட்டங்கள் Q விலும் இடைவெட்டுகின்றன.

(i) மேற்குறித்த தகவல்களை உள்ளடக்கிய பருமட்டான ஒரு படம் வரைக.

(ii) $ABEC$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

(iii) $PQ = \frac{1}{4} DE$ என நிறுவுக.

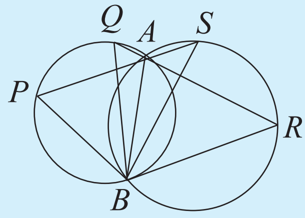
6. முக்கோணி PQR இல் பக்கம் QR இன் நடுப்புள்ளி S ஆகும். PS இன் நடுப்புள்ளி T ஆவதுடன் T இனூடாக PQ இற்கு சமாந்தரமாக வரையப்பட்ட கோடானது பக்கம் PR ஐ X இலும் பக்கம் QR ஐ Y இலும் சந்திக்கின்றது.



(i) $YT = \frac{1}{2} PQ$ என நிறுவுக.

(ii) $XY = \frac{3}{4} PQ$ என நிறுவுக.

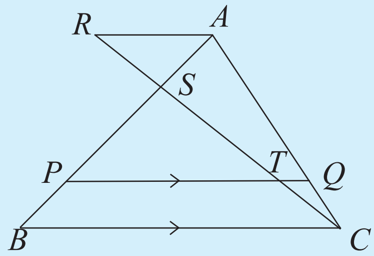
7. (a) தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப



(i) $A\hat{P}B$ யிற்கு சமனான ஒரு கோணத்தைப் பெயரிடுக.

(ii) ΔBPS, ΔBQR ஆகியன இயல்பொத்த முக்கோணிகள் என நிறுவுக.

(iii) $BP : BQ = BS : BR$ என நிறுவுக.



(b) தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

(i) $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{AQ}{AC}$ என நிறுவுக.

(ii) $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{RT}{RC}$ என நிறுவுக.

8. (i) $y = x(x-2)$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்காக $-3 \leq x \leq 5$ என்னும் வீச்சில் ஒரு பெறுமான அட்டவணையைத் தயாரிக்க.

(ii) x, y ஆகிய பெறுமானங்களுக்குப் பொருத்தமான ஓர் அளவிடையை எடுத்து $y = x(x-2)$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைக.

(iii) வரைபிலிருந்து

(a) வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு

(b) சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம்

(c) சார்பின் பெறுமானம் 0 ஆகும் x இன் பெறுமானங்கள்.

(d) $x(x-2) = 0$ இன் மூலகங்கள்

(e) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான ஆயிடை ஆகியவற்றை எழுதுக.

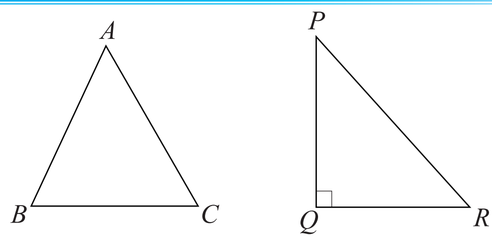
17 பைதகரசின் தேற்றம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- பைதகரசின் தேற்றத்தை அறிந்துகொள்வதற்கும்
- பைதகரசின் தேற்றத்தைக் கொண்டு கணிப்புகளைச் செய்வதற்கும் ஏறிகளை நிறுவுவதற்கும்
- பைதகரசின் மும்மையை இனங்காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

17.1 அறிமுகம்

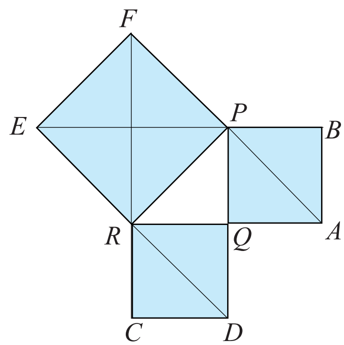


உருவில் காணப்படும் ABC, PQR, KLM ஆகிய முக்கோணிகள் முறையே கூர்ங்கோண, செங்கோண, விரிகோண முக்கோணிகள் ஆகும். அவற்றின் அகக் கோணங்களில் பெரிய கோணத்திற்கு (அல்லது கோணங்களுக்கு) ஏற்ப அவ்வாறு வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. இதற்கமைய முக்கோணி PQR இல் செங்கோணமான $P\hat{Q}R$ அம்முக்கோணியின் மிகப்பெரிய கோணம் ஆகும். இக்கோணத்திற்கு எதிரேயுள்ள பக்கம் PR ஆனது முக்கோணியின் நீளமான பக்கமாகும். இது செம்பக்கம் எனவும் எஞ்சிய இரு பக்கங்களான PQ, QR ஆகியன செங்கோணத்தை ஆக்கும் இரு பக்கங்கள் எனவும் அழைக்கப்படுவதை நாம் அறிவோம்.

ஆதிகாலத்திலிருந்து மனிதன் முக்கோணிகளின் கேத்திரகணித இயல்புகள் பற்றி அறிந்திருந்தான் என்பதற்கு இன்னும் சான்றுகள் உள்ளன. கி.மு. 3000 இல் எகிப்தில் அமைக்கப்பட்ட பிரமிட்டும் (கூம்பகங்கள்) அபூர்வமான அமைப்புகள் என்பதை அனைவரும் ஏற்றுக்கொண்டுள்ளனர். அவ்வமைப்புகளுக்காகக் கேத்திரகணித அறிவு விசேடமாக முக்கோணிகளின் பல்வேறு இயல்புகள் பற்றிய அறிவு கட்டாயமானதாகும். கி.மு. 1650 இல் அமைக்கப்பட்ட ''றைன்ட் பவறஸ்'' இல் முக்கோணி உருவங்களே அதிக அளவில் காணப்படுகின்றன. இவ்வாறு இனங்காணப்பட்டிருந்த கேத்திர கணித அறிவிலிருந்து செங்கோண முக்கோணிகளின் பக்கங்களின் நீளங்களிடையே உள்ள அபூர்வ தொடர்பு கி.மு. ஆறாம் நூற்றாண்டில் பைதகரஸ் என்ற கிரேக்கக் கணித

வியலாளரினால் எடுத்துரைக்கப்பட்டது. இக்காலத்திற்கு முன்னர் இருந்தே சீனா, இந்தியா போன்ற கீழைத்தேய நாடுகளில் இருந்தும் வேறு நாகரீகங்களுக்கிடையேயும் இத்தொடர்பு அறியப்பட்டமைக்குச் சான்றுகள் இருந்தபோதிலும் இத்தொடர்பு டைமையை முதன்முதலாகக் கேத்திரகணித முறையாகப் பைதகரஸ் நிறுவியதாக நம்பப்படுகின்றது. பின்னர் கி.மு. 3 ஆம் நூற்றாண்டில் யூக்கிலிட்டு என்ற கணிதவியலாளர் இம்முடிபை நிறுவலுடன் ஒரு தேற்றமாகத் தமது The Elements என்னும் வரலாற்றுப் புகழ்பெற்ற நூலில் உள்ளடக்கினார்.

17.2 பைதகரசின் தேற்றம்



ஒரே அளவான இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணி வடிவமுள்ள பீங்கான் ஓடுகள் பதிக்கப்பட்ட வீட்டுத் தளத்தின் ஒரு பகுதி உருவில் காணப்படுகின்றது. அதில் இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணப் பகுதி PQR ஐக் கருதுவோம். இங்கு PQ ஒரு பக்கமாகவுடைய சதுரம் $PQAB$ யும் RQ ஐ ஒரு பக்கமாகவுடைய சதுரம் $RCDQ$ வும் (நீல நிறத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள பிரதேசம்) வரையப்பட்டுள்ளன. பக்கம் PQ மீது உள்ள ஒரு சதுரத்திற்கு இரு பீங்கான் ஓடுகளினால் மூடப்படும் பரப்பளவும் பக்கம் QR மீது உள்ள சதுரத்திற்கு இரு பீங்கான் ஓடுகளினால் மூடப்படும் பரப்பளவும் உள்ளன. அதே வேளை செம்பக்கம் PR மீது உள்ள சதுரம் $PREF$ இற்கு நான்கு பீங்கான் ஓடுகளினால் மூடப்படும் பரப்பளவும் உள்ளது. இதற்கேற்பச் செங்கோண முக்கோணி PQR இன் மூன்று பக்கங்களிலும் இருக்கும் சதுரங்களுக்கு

சதுரம் $PQAB$ யின் பரப்பளவு + சதுரம் $RCDQ$ யின் பரப்பளவு = சதுரம் $PREF$ இன் பரப்பளவு

என்னும் தொடர்புடைமை பொருந்துவதாகத் தெரிகின்றது.

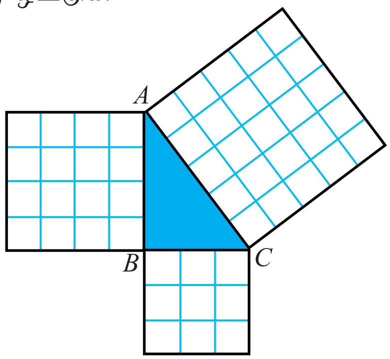
இத்தொடர்புடைமையைப் பின்வரும் செயற்பாட்டின் மூலம் உறுதிப்படுத்திக் கொள்வோம்.

செயற்பாடு

ஒரு சதுரக் கோட்டுத் தாளில் பின்வரும் அளவுகளுள்ள மூன்று சதுரங்களையும் ஒரு செங்கோண முக்கோணியையும் வெட்டியெடுக்க.

(i) ஒரு பக்கம் மூன்று கட்டங்கள் நீளமுள்ள ஒரு சதுர வடிவம்
(ii) ஒரு பக்கம் நான்கு கட்டங்கள் நீளமுள்ள ஒரு சதுர வடிவம்
(iii) ஒரு பக்கம் ஐந்து கட்டங்கள் நீளமுள்ள ஒரு சதுர வடிவம்
(iv) செங்கோணத்தை அடங்கியுள்ள பக்கங்களில் 3 கட்டங்களும் 4 கட்டங்களும் உள்ள செங்கோண முக்கோணி வடிவம்.

ஒரு வெள்ளைத் தாளில் செங்கோண முக்கோணி வடிவத்தை ஒட்டி, அதன் ஒவ்வொரு பக்கத்தின் மீதும் சதுர வடிவங்களைப் பின்வரும் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு வைத்து ஒட்டுக.



செங்கோண முக்கோணி ABC யின் பக்கம் AB மீது

உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = 16 கட்டங்கள்

பக்கம் BC மீது உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = 9 கட்டங்கள்

பக்கம் AC மீது உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = 25 கட்டங்கள்

இதற்கேற்பச் செங்கோண முக்கோணி ABC யில் செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்களாகிய AB, BC ஆகிய பக்கங்களின் மீது

உள்ள சதுரங்களின் மொத்தப் பரப்பளவு = 16 + 9 கட்டங்கள்

AB, BC ஆகிய பக்கங்களின் மீது உள்ள சதுரங்களின்

மொத்தப் பரப்பளவு = 25 கட்டங்கள்

செங்கோண முக்கோணி ABC யின் செம்பக்கம்

AC இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = 25 கட்டங்கள்

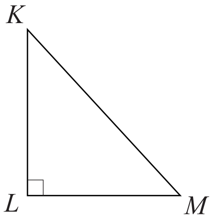
ஆகவே செங்கோண முக்கோணி ABC யில் செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்களாகிய AB, BC ஆகியவற்றின் மீது உள்ள சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் செம்பக்கம் AC இன் மீது உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு சமம்.

செங்கோண முக்கோணி தொடர்பாக ஆதிகாலத்திலிருந்தே அறியப்பட்டிருந்த இத்தொடர்புடைமையை ஒரு தேற்றமாகப் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

பைதகரசின் தேற்றம்

ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கத்தின் மீது வரையப்பட்டுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவானது செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்களின் மீது வரையப்பட்டுள்ள சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

உருவில் காணப்படும் செங்கோண முக்கோணி KLM இன் செம்பக்கம் KM ஆகவும் செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்கள் KL, LM ஆகவும் இருக்கும்போது



பக்கம் KL இன் மீது உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு $= KL^2$

பக்கம் LM இன் மீது உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு $= LM^2$

பக்கம் KM இன் மீது உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு $= KM^2$

அப்போது பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப

$$\boxed{KL^2 + LM^2 = KM^2}$$

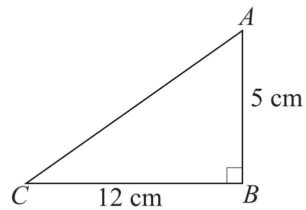
பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிப்புகள் செய்யப்படும் விதம் பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

ஒரு செங்கோண முக்கோணி ABC யில் $\hat{B} = 90^\circ$, $AB = 5$ cm, $BC = 12$ cm உம் ஆகும். பக்கம் AC யின் நீளத்தைக் கணிக்க.

பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 \\ &= 169 \end{aligned}$$



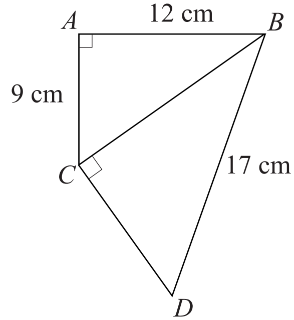
$$\begin{aligned} \therefore \quad AC &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

$\therefore$ பக்கம் AC யின் நீளம் 13 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2

உருவில் காணப்படும் தகவல்களுக்கேற்ப CD யின் நீளத்தைக் காண்க.

உருவிற்கேற்ப முக்கோணி ABC யைக் கருதிப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது



$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 12^2 + 9^2 \text{ (பிரதியிடும்போது)} \\ &= 144 + 81 \\ &= 225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad BC &= \sqrt{225} \\ &= 15 \end{aligned}$$

மீண்டும் செங்கோண முக்கோணி BCD யைக் கருதிப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$CD^2 + BC^2 = BD^2$$
$$CD^2 + 15^2 = 17^2$$
$$CD^2 + 225 = 289$$
$$\therefore \quad CD^2 = 289 - 225$$
$$= 64$$
$$\therefore \quad CD = 8$$

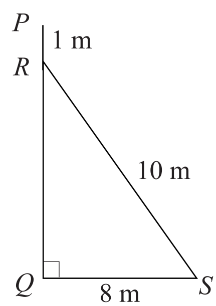
$\therefore$ CD யின் நீளம் 8 cm ஆகும்.

இப்போது நடைமுறைப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்குப் பைதகரசின் தேற்றம் பயன்படுத்தப்படும் விதம் பற்றி ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 3

ஒரு நிலைக்குத்தான மின் கம்பத்தின் உச்சியிலிருந்து 1 m கீழேயுள்ள ஒரு வளையத்தில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு கம்பியின் மற்றைய நுனி கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 8 m தூரத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள இன்னுமொரு வளையத்தில் கட்டப்பட்டுள்ளது. இரு வளையங்களுக்குமிடையே உள்ள கம்பியின் நீளம் 10 m எனின், கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க. (கம்பி நன்றாக இழுக்கப்பட்டுள்ளதெனக் கொள்க).

தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப உருவை வரைவோம்.



கம்பம் PQ நிலைக்குத்தானது ஆகையால் அது கிடைத் தளத்துடன் ஒரு செங்கோணத்தை உண்டாக்குகின்றது. அதாவது $P\hat{Q}S = 90^\circ$ ஆகும்.

QRS ஒரு செங்கோண முக்கோணி ஆகையால்,
பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்க

$$QR^2 + QS^2 = RS^2$$
$$QR^2 + 8^2 = 10^2$$
$$QR^2 + 64 = 100$$
$$\therefore \quad QR^2 = 100 - 64$$
$$QR^2 = 36$$
$$\therefore \quad QR = 6$$

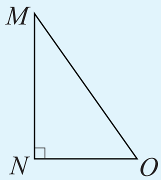
$\therefore$ கம்பத்தின் உயரம் $= QR + PR$
$= 6 + 1$
$= 7$

$\therefore$ கம்பத்தின் உயரம் 7 m ஆகும்.

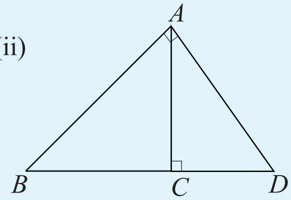
இப்போது பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்வோம்.

பயிற்சி 17.1

1. பின்வரும் உருக்களைப் பயன்படுத்தி கீழே தரப்பட்டுள்ள வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

(i) 

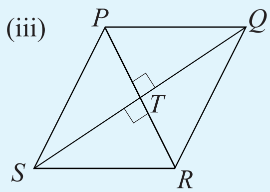
$MO^2 = ... + ...$

(ii) 

$BD^2 = ... + ...$

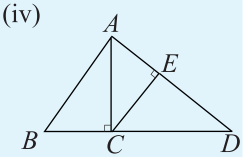
$.... = AC^2 + CD^2$

$AB^2 = AC^2 + ...$

(iii) 

$PQ^2 = ... + ...$

$QR^2 = ... + ...$

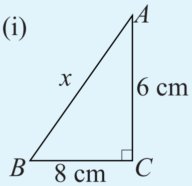
(iv) 

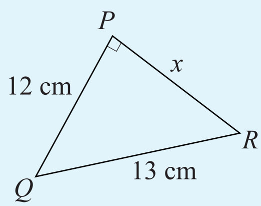
$AB^2 = ... + AC^2$

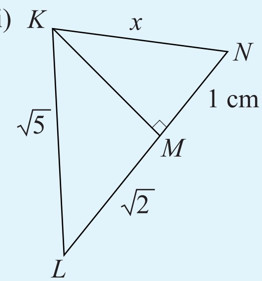
$.... = AE^2 + EC^2$

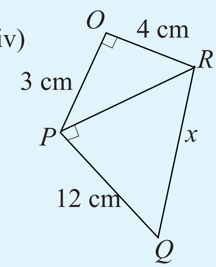
$AD^2 = AC^2 + ...$

2. பின்வரும் செங்கோண முக்கோணிகள் ஒவ்வொன்றிலும் x இனால் காட்டப்படும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) 

(ii) 

(iii) 

(iv) 

3. ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC யில் உச்சி A யிலிருந்து பக்கம் BC யிற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தின் அடி D ஆகும். முக்கோணியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 2 cm எனின், பக்கம் AD யின் நீளத்தைக் காண்க. (விடையைச் சேடு வடிவத்தில் காட்டுக.)

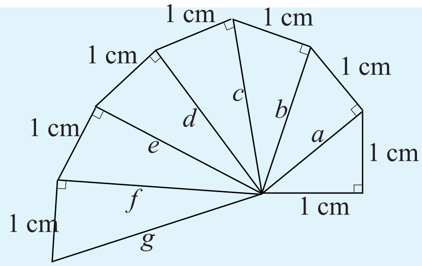
4. கிடை நிலத்தின் மீது இருக்கும் ஒருவர் ஒரு புள்ளி P யிலிருந்து வடக்கு நோக்கி 15 m சென்று அவ்விடத்திலிருந்து கிழக்கு நோக்கி 8 m செல்வதன் மூலம் புள்ளி Q வை அடைகின்றார்.

(i) மேற்குறித்த தகவல்களை ஒரு பரும்படிப் படத்தில் காட்டுக.

(ii) தூரம் PQ வைக் காண்க.

5. ஒரு சாய்சதுரத்தின் இரு மூலைவிட்டங்களின் நீளங்கள் 12 cm, 16 cm ஆகும். அதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

6. உருவில் ஆக்கிமீடிஸ் சுருளி எனப்படும் விசேட அமைப்பு காணப்படுகின்றது. அதில் தரப் பட்டுள்ள அளவீடுகளுக்கேற்ப ஒவ்வொரு செங்கோண முக்கோணியையும் கொண்டு a, b, c, d, e, f, g ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. (விடையைச் சேடு வடிவத்தில் காட்டுக.)

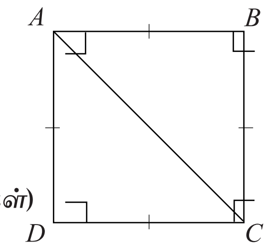


17.3 பைதகரசின் தேற்றத்தின் பயன்பாடுகள் (மேலும்)

பைதகரசின் தேற்றத்துடன் தொடர்புபட்ட ஏறிப் பிரசினங்கள் தீர்க்கப்படும் விதம் பற்றி இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

$ABCD$ ஒரு சதுரம் ஆகும். $AC^2 = 2AB^2$ என நிறுவுக.



நிறுவல்: $A\hat{B}C = 90^{\circ}$ ஆகையால்

ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணியாகும் முக்கோணி

ABC யிற்குப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$AC^2 = AB^2 + AB^2$ ($AB = BC$, சதுரத்தின் பக்கங்கள்)

$$\therefore \quad AC^2 = 2AB^2$$

உதாரணம் 2

ஒரு சாய்சதுரம் $ABCD$ யில் AC, BD ஆகிய மூலைவிட்டங்கள் O வில் இடைவெட்டுகின்றன. $AC^2 + BD^2 = 4\,AB^2$ என நிறுவுக.

நிறுவல்: $ABCD$ ஒரு சாய்சதுரம் ஆகையால் மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணங்களில் இருசமகூறிடுகின்றன. (உருவைப் பார்க்க)

$\therefore \quad A\hat{O}B = 90^{\circ}, AO = OC, BO = OD$ ஆகும்.

பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப செங்கோண முக்கோணி AOB யில்

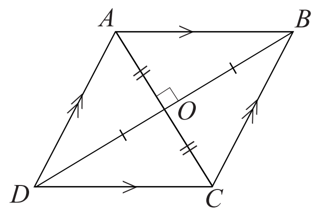
$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

$$(\frac{1}{2}AC)^2 + (\frac{1}{2}BD)^2 = AB^2$$

$$\frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2 = AB^2$$

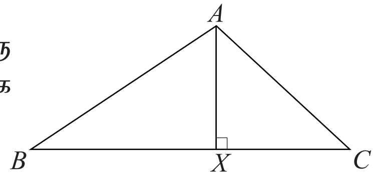
$$\frac{1}{4}(AC^2 + BD^2) = AB^2$$

$$\therefore \quad AC^2 + BD^2 = 4\,AB^2$$



உதாரணம் 3

ஒரு முக்கோணி ABC யில் கோணம் $B\hat{A}C$ ஒரு விரிகோணமாகும். A யிலிருந்து BC யிற்குச் செங்குத்தாக AX வரையப்பட்டுள்ளது.
$AB^2 - AC^2 = BX^2 - CX^2$ என நிறுவுக.



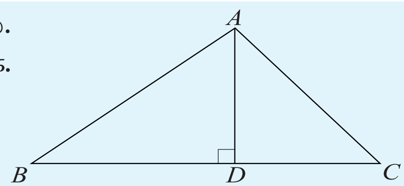
நிறுவல்: செங்கோண முக்கோணி AXB யில் பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப
$AB^2 = AX^2 + BX^2$ —— ①
செங்கோண முக்கோணி AXC யில் பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப
$AC^2 = AX^2 + CX^2$ —— ②

$$
\begin{aligned}
① - ② ;\ AB^2 - AC^2 &= AX^2 + BX^2 - (AX^2 + CX^2)\\
&= AX^2 + BX^2 - AX^2 - CX^2\\
&= BX^2 - CX^2
\end{aligned}
$$

மேற்குறித்த உதாரணங்களில் காணப்படுகின்றவாறு பின்வரும் ஏறிகளை நிறுவுவோம்.

பயிற்சி 17.2

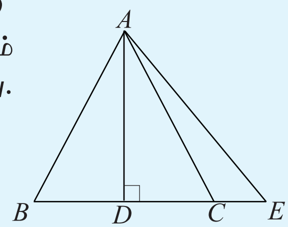
1. E ¸ Â À முக்கோணி ABC யில் AD குத்துயரமாகும். $AD = DC$ எனின், $AB^2 = BD^2 + DC^2$ என நிறுவுக.



2. முக்கோணி ABC யில் AD ö \ [குத்துயரமாகும். $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ என நிறுவுக.

3. சமபக்க முக்கோணி ABC யில் AD குத்துயரமாகும். $4\ AD^2 = 3BC^2$ என நிறுவுக.

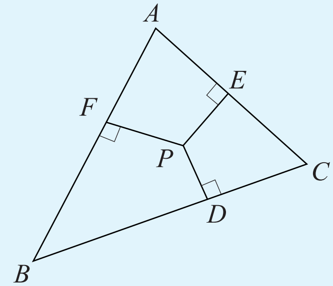
4. உருவில் காணப்படும் சமபக்க முக்கோணி ABC யில் AD செங்குத்துயரமாகும். $DC = CE$ ஆக இருக்குமாறு பக்கம் BC ஆனது E வரைக்கும் நீட்டப்பட்டுள்ளது. $AE^2 = 7\ EC^2$ என நிறுவுக.



5. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் மூலைவிட்டங்கள் O வில் செங்கோணத்தில் இடை வெட்டுகின்றன $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ என நிறுவுக.

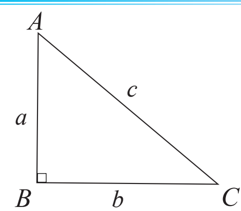
6. O என்பது செவ்வகம் $ABCD$ யின் உள்ளே உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். $AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$ என நிறுவுக.
(உதவி: O இனூடாக செவ்வகத்தின் பக்கம் ஒன்றிக்கு சமாந்தரம் வரைக.)

7. முக்கோணி ABC யின் உள்ளே புள்ளி P உள்ளது. P யிலிருந்து BC, AC, AB ஆகிய பக்கங்களுக்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துகளின் அடிகள் முறையே D, E, F ஆகும்.
(i) $BP^2 - PC^2 = BD^2 - DC^2$ எனவும்
(ii) $BD^2 + CE^2 + AF^2 = CD^2 + AE^2 + BF^2$ எனவும்
நிறுவுக.



8. நேர்கோடு ABC யின் ஒரே பக்கத்தில் $ABXY$, $BCPQ$ என்னும் இரு சதுரங்கள் உள்ளன. $PX^2 + CY^2 = 3\,(AB^2 + BC^2)$ என நிறுவுக.

17.4 பைதகரசின் மும்மை



உருவில் காணப்படும் செங்கோண முக்கோணி ABC யில் செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்களின் நீளங்கள் a ஆகவும் b ஆகவும் செம்பக்கத்தின் நீளம் c ஆகவும் இருக்கும்போது பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப $a^2 + b^2 = c^2$ என்பதை நாம் அறிவோம். இவ்வாறு சமன்பாடு $a^2 + b^2 = c^2$ ஐத் திருப்தியாக்கும் a, b, c ஆகிய பெறுமானங்கள் பைதகரசின் மும்மை எனப்படும்.

$3^2 + 4^2 = 5^2$ ஆகையால் (3, 4, 5) ஆகியன பைதகரசின் மும்மை ஆகும். (3, 4, 5) என்ற மும்மையின் எந்த ஒரு மடங்கும் பைதகரசின் மும்மையாகும்.

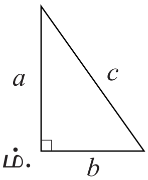
உதாரணம் : (3, 4, 5) இன் இருமடங்கு (6, 8, 10) ஆகும்.

$6^2 + 8^2 = 10^2$ ஆகையால் (6, 8, 10) உம் பைதகரசின் மும்மையாகும். (3, 4, 5) இன் மும்மடங்கு (9, 12, 15) ஆகும். இங்கு $9^2 + 12^2 = 15^2$. ஆகவே (9, 12, 15) உம் பைதகரசின் மும்மையாகும். இத்தகைய (3, 4, 5) இன் மடங்குகள் தவிர்ந்த வேறு பைதகரசின் மும்மைகளும் உள்ளன.

உதாரணம் : $5^2 + 12^2 = 13^2$ ஆகையால் (5, 12, 13) பைதகரசின் மும்மையாகும்.
$8^2 + 15^2 = 17^2$ ஆகையால் (8, 15, 17) பைதகரசின் மும்மையாகும்.

மேலே கூறியது போன்று இவற்றின் மடங்குகளும் பைதகரசின் மும்மைகளாகும்.

பைதகரசின் மும்மைகளைப் பெறுவதற்கு யூக்கிலிட்டு என்னும் கணிதவியலாளர் ''பரிமாணச் சமன்பாடுகளை'' அறிமுகஞ்செய்தார். x, y என்னும் எவையேனும் இரு எண்கள் $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$, $c = x^2 + y^2$ என அமையுமாறு இருக்கும்போது a, b, c ஆகியவற்றுக்குப் பைதகரசின் மும்மை கிடைக்கின்றது.



உதாரணம் : $x = 6, y = 5$ ஆக இருக்கும்போது

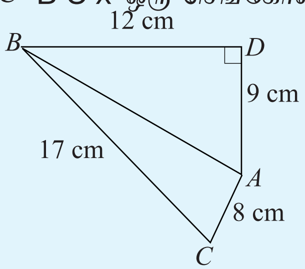
$$a = x^2 - y^2 = 6^2 - 5^2 = 11$$
$$b = 2xy = 2 \times 6 \times 5 = 60$$
$$c = x^2 + y^2 = 6^2 + 5^2 = 61$$ எனப் பெறப்படும்.

அப்போது, (11, 60, 61) பைதகரசின் மும்மையாகும்.

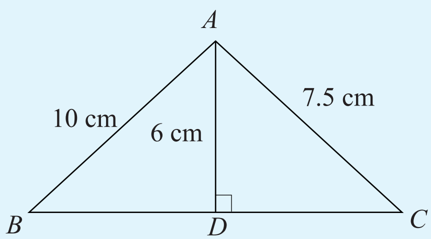
பயிற்சி 17.3

1. இரு முக்கோணிகளின் பக்கங்களின் அளவுகள் (i) (8, 15, 17) (ii) (14, 18, 25) எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன. இம்முக்கோணிகளிலிருந்து செங்கோண முக்கோணியைத் தெரிந்தெடுக்க. அதற்கேற்ப பைதகரசின் மும்மையை எழுதுக.

2. (i), (ii) ஆகிய உருக்களில் காணப்படும் அளவுகளுக்கேற்ப ஒவ்வோர் உருவிலும் $B\hat{A}C$ B Ú x ஒரு செங்கோணமெனக் காட்டுக.



(i)



(ii)

3. பின்வரும் அட்டவணையைப் பூர்த்திசெய்து பைதகரசின் மும்மையைக் காண்க.

x	y	x^2	y^2	a	b	c	பைதகரசின் மும்மை
				$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$	
2	1						
5	4						
4	3						
6	5						
7	5						

பலவினப் பயிற்சி

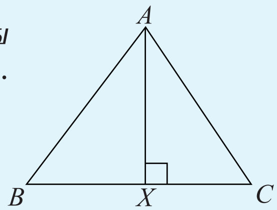
1. O வை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 9 cm தூரத்தில் இருக்கும் ஒரு நாண் AB யின் நீளம் 24 cm ஆகும். வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

2. $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $\hat{B}$ செங்கோணம் ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC யை அமைக்க. நீர் வரைந்த முக்கோணியைக் கொண்டு $\sqrt{13}$ இன் பெறுமானத்தை முதலாம் தசம தானத்திற்குக் காண்க.

3. பின்வரும் நீளங்கள் ஒவ்வொன்றையும் கொண்ட நேர்கோட்டுத் துண்டங்களை அமைக்க.
(i) $\sqrt{8}$ cm (ii) $\sqrt{10}$ cm (iii) $\sqrt{41}$ cm

4. ABC என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். AB யின் நடுப்புள்ளி D யும் CD யின் நடுப்புள்ளி E யும் ஆகும். $16\,AE^2 = 7AB^2$ என நிறுவுக.

5. முக்கோணி ABC யில் $\hat{B}$ ஒரு கூர்ங்கோணமாகும். A யிலிருந்து BC யிற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தின் அடி X ஆகும். $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,BC.BX$ என நிறுவுக.



18 திரிகோணகணிதம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்

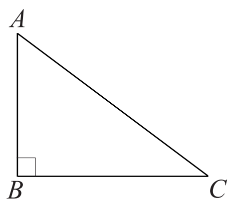
- திரிகோணகணித விகிதங்களான சைன், கோசைன், தான்சன் ஆகியவற்றை அறிந்து கொள்ளவும்
- சைன், கோசைன், தான்சன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி முக்கோணிகள் தொடர்பான கணித்தல்களைச் செய்யவும்
- திரிகோணகணிதப் பிரசினங்களின் தீர்வுகளைப் பரீட்சிப்பதற்காக விஞ்ஞான கணிகருவியைப் பயன்படுத்தவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

18.1 செங்கோண முக்கோணிகள்

ஒரு செங்கோண முக்கோணியில் இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்கள் தரப்படும்போது எஞ்சிய பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்பதற்குப் பைதகரசின் தொடர்பைப் பயன்படுத்த முடியும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

ஒரு செங்கோண முக்கோணியில் ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் செங்கோணத்தைத் தவிர வேறொரு கோணத்தின்பருமனும் தரப்படும் போது முக்கோணியின் எஞ்சிய பக்கங்களின் நீளங்களைப் பைதகரசின் தொடர்பின் மூலம் பெற்றுக்கொள்ள முடியாது. அதற்கான ஒரு முறையை அறிந்து கொள்வதற்காக முதலில் ஒரு செங்கோண முக்கோணியிலுள்ள பக்கங்களைப் பெயரிடும் முறையை அறிந்து கொள்வோம்.



செங்கோண முக்கோணி ABC இல் $\hat{B}$ செங்கோணமாகும். அப்போது $\hat{A}$, $\hat{C}$ ஆகியன இரண்டும் கூர்ங்கோணங்களாகும். செங்கோணமாகிய $\hat{B}$ யிற்கு எதிரே உள்ள பக்கம் AC செம்பக்கம் எனப்படும். முக்கோணியின் மற்றைய இரண்டு கோணங்களிலும் ஒன்றாகிய $\hat{C}$ ஐக் கருதினால், அதற்கு எதிரே அமைந்துள்ள பக்கம் AB ஆனது $\hat{C}$ இன் எதிர்ப் பக்கம் என அழைக்கப்படும். மேலும் $\hat{C}$ இன் இரு பக்கங்களில் ஒன்றாகிய முக்கோணியின் செம்பக்கமல்லாத பக்கமாகிய BC ஆனது $\hat{C}$ இன் அயற் பக்கம் என அழைக்கப்படும்.

இதற்கேற்ப, $\hat{A}$ ஐக் கருதினால், முன்னர் போன்றே, அதற்கு எதிரே அமைந்துள்ள பக்கம் BC ஆனது A இன் எதிர்ப்பக்கமாகும். முக்கோணியில் செம்பக்கமல்லாத $\hat{A}$ இன் ஒரு புயமாகிய AB ஆனது அயற்பக்கம் ஆகும்.

அதற்கேற்ப உருவிலுள்ள செங்கோண முக்கோணி PQR இல்

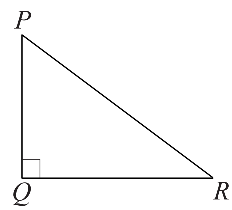
செம்பக்கம் $= PR$

$Q\hat{R}P$ ஐக் கருதினால், எதிர்ப்பக்கம் $= PQ$

அயற்பக்கம் $= QR$

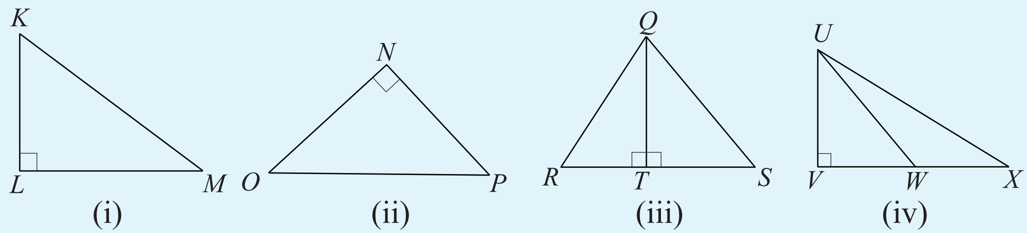
$Q\hat{P}R$ ஐக் கருதினால், எதிர்ப்பக்கம் $= QR$

அயற்பக்கம் $= PQ$



பயிற்சி 18.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் உருவிலிருந்தும் தரப்பட்ட அட்டவணையை நிரப்புக.



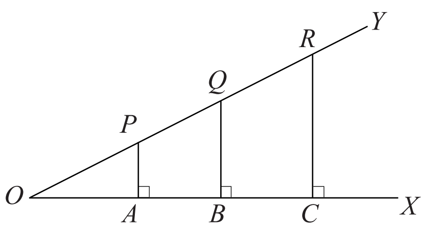
	செங்கோண முக்கோணி	செம் பக்கம்	கருதும் கோணம்	எதிர்ப் பக்கம்	அயற் பக்கம்
(i)	KLM	KM	$L\hat{K}M$		
			$L\hat{M}K$		
(ii)	PNO		$N\hat{O}P$		
			$O\hat{P}N$		
(iii)	QRT		$R\hat{Q}T$		
	QTS		$T\hat{Q}S$		
(iv)	UVX		$V\hat{U}X$		
	UVW		$U\hat{V}W$		

18.2 திரிகோணகணித விகிதங்கள்

ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் ஒரு கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களுக் கிடையிலான தொடர்புகள் பற்றி ஆராய்வதற்காகக் கீழே உள்ள செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு

- XO, OY ஆகிய புயங்கள் ஒவ்வொன்றும் 11 cm ஆக இருக்கத்தக்கதாக 30° ஆகவுள்ள $X\hat{O}Y$ ஐ வரைக.
- பக்கம் OY வழியே O இலிருந்து 2 cm, 4 cm, 7 cm தூரங்களில் முறையே P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்க.
- மூலைமட்டத்தைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுமுறையில் P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து கோடு OX இற்குச் செங்குத்து கோடுகள் வரைந்து அவை கோடு OX ஐ சந்திக்கும் புள்ளிகளை முறையே A, B, C எனப் பெயரிடுக.
- அப்போது கீழே தரப்பட்டுள்ளதைப் போன்று ஓர் உருவைப் பெறுவீர்கள்.

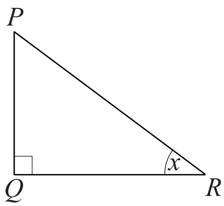


- ஒவ்வொரு செங்கோண முக்கோணியிலும் பக்கங்களை அளந்து கீழேயுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக. (கடைசி நிரல்களிலுள்ள வகுத்தல்களை முதலாம் தசமதானத்திற்குப் பெறுக.)

செங் கோண முக்கோணி	செம் பக்கம் (cm)	30° கோணத் தின் எதிர்ப் பக்கம் (cm)	30° கோணத் தின் அயற் பக்கம் (cm)	$\frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$	$\frac{\text{அயற் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$	$\frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அயற் பக்கம்}}$
AOP	2	1	1.7	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1.7}{2} = 0.9$	$\frac{1}{1.7} = 0.6$
BOQ						
COR						

செயற்பாட்டில் பெற்ற அளவுகளைக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட அட்டவணையின் படி 30° கோணத்திற்கு அனைத்து முக்கோணிகளிலும் $\dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$ என்பதற்கு 0.5 உம், $\dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அயற்பக்கம்}}$ என்பதற்கு 0.6 உம் $\dfrac{\text{அயற் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$ என்பதற்கு 0.9 உம் பெறப்பட்டுள்ளன.

இவ்வாறு செங்கோண முக்கோணிகளில் ஒவ்வொரு பக்கங்களுக்கிடையிலான விகிதங்களுக்கு ஒரு மாறாப் பெறுமானம் பெறப்படுவதற்கான காரணம் அவை இயல்பொத்தவையாயிருப்பது என்பதை நீங்கள் அவதானிக்கலாம். இவை திரிகோணகணித விகிதங்கள் என அழைக்கப்படும். இத்திரிகோணகணித விகிதங்கள் அதனுடன் தொடர்புடைய பக்கங்களுக்கேற்ப சைன் 30°, தான்சன் 30°, கோசைன் 30° எனப் பெயரிடப்படும். சைன் ஐக் குறிப்பிடுவதற்காக "sin" உம் தான்சனைக் குறிப்பிடுவதற்காக "tan" உம் கோசைனைக் குறிப்பிடுவதற்காக "cos" உம் இடப்படும். இதற்கேற்ப 30° கோணத்தின் சைன் "$\sin 30^\circ$" உம் 30° கோணத்தின் கோசைன் "$\cos 30^\circ$" உம் 30° கோணத்தின் தான்சன் "$\tan 30^\circ$" உம் ஆகும்.



இனி உருவில் தரப்பட்டுள்ள செங்கோண முக்கோணி PQR இற்கான திரிகோணகணித விகிதங்களை மேலே குறிப்பிட்ட குறியீடுகளைக் கொண்டு எழுதுவோம்.

x இன் சார்பில்;

$$\sin x = \frac{x \text{ இன் எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \frac{PQ}{PR}$$

$$\cos x = \frac{x \text{ இன் அயற் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \frac{QR}{PR}$$

$$\tan x = \frac{x \text{ இன் எதிர்ப் பக்கம்}}{x \text{ இன் அயற் பக்கம்}} = \frac{PQ}{QR}$$

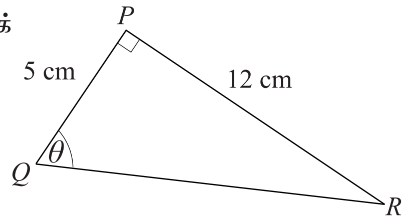
இம்மூன்று திரிகோணகணித விகிதங்களையும் பயன்படுத்திக் கணித்தல்கள் செய்யும் முறையைக் கீழேயுள்ள உதாரணங்களிலிருந்து ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி PQR இல் $\hat{P}$ ஒரு செங்கோணமாகும். $PQ = 5$ cm உம் $PR = 12$ cm உம் ஆகும். $P\hat{Q}R = \theta$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) பக்கம் QR இன் நீளத்தைக் காண்க.
(ii) கீழே தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களைக் காண்க.

(a) $\sin\theta$ **(b)** $\cos\theta$ **(c)** $\tan\theta$



(i) பைதகரசின் தேற்றத்தின்படி:

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2$$
$$= 5^2 + 12^2$$
$$= 25 + 144$$
$$\therefore \quad QR = \sqrt{169}$$
$$= 13$$

$\therefore$ பக்கம் QR இன் நீளம் 13 cm ஆகும்

(ii) **(a)** $\sin\theta = \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{12}{13} = 0.9230$ **(b)** $\cos\theta = \dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{5}{13} = 0.3846$ **(c)** $\tan\theta = \dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{12}{5} = 2.4$

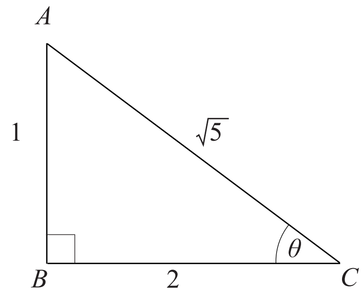
உதாரணம் 2

$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ ஆயின் $\sin\theta$, $\cos\theta$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ ஆயின்

θ இன் எதிர்ப்பக்கம் 1 அலகும் θ இன் அயற்பக்கம் 2 அலகும் ஆகும்.

இத்தகவல்களை ஓர் உருவில் குறிப்போம்.



அப்போது பைதகரசின் தேற்றப்படி முக்கோணி ABC இல்

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 1^2 + 2^2$$
$$AC^2 = 5$$
$$\therefore \quad AC = \sqrt{5}$$

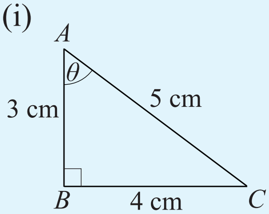
அப்போது; $\sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{அயற் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

பயிற்சி 18.2

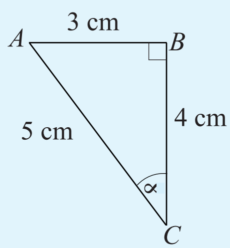
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் உருவிலும் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப கீழே தரப்பட்டுள்ள கோவைகளில் கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

(i)



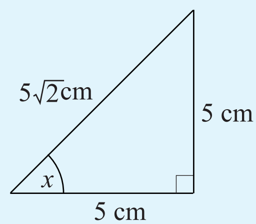
$\sin\theta =$ ....
$\cos\theta =$ ....
$\tan\theta =$ ....

(ii)



$\sin\alpha =$ ....
$\cos\alpha =$ ....
$\tan\alpha =$ ....

(iii)



$\sin x =$ ....
$\cos x =$ ....
$\tan x =$ ....

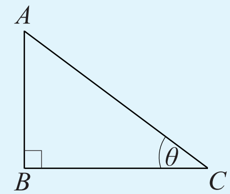
2. $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$ ஆயின்,
(i) $\tan\theta$
(ii) $\cos\theta$
ஆகியவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

3. உருவிலுள்ள முக்கோணி ABC இல் $\hat{B}$ செங்கோணமாகும். $\hat{C} = \theta$ எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

(i) $B\hat{A}C$ யை θ இன் சார்பில் தருக.

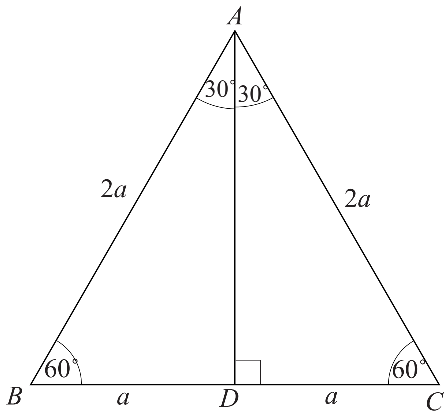
(ii) $\sin\theta = \cos(90 - \theta)$ எனக் காட்டுக.

(iii) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ எனக் காட்டுக.



18.3 30°, 45°, 60° ஆகிய கோணங்களின் திரிகோணகணித விகிதங்கள்

ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a$ ஆகவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணியிலிருந்து 60°, 30° கோணங்களின் திரிகோணகணித விகிதங்களைப் பெற்றுக்கொள்ளலாம்.



உருவில் சமபக்க முக்கோணி ABC தரப்பட்டுள்ளது. அதன் ஒவ்வொரு கோணமும் 60° ஆகும். உச்சி A இலிருந்து பக்கம் BC இற்கு செங்குத்து AD ஐ வரைவதால் D ஆனது பக்கம் BC யின் நடுப்புள்ளி ஆவதுடன் $B\hat{A}C$ என்னும் கோணமானது இருசமகூறிடப்படுகின்றது என்பதை நாம் அறிவோம்.
அப்போது $B\hat{A}D = 30^\circ$ ஆகும்.

செங்கோண முக்கோணி ABD இல் பக்கம் AD இன் நீளத்தை a இன் சார்பில் காண்போம்.
பைதகரசின் தேற்றப்படி,

$$\begin{aligned} BD^2 + AD^2 &= AB^2 \\ a^2 + AD^2 &= (2a)^2 \\ AD^2 &= 4a^2 - a^2 \\ &= 3a^2 \\ AD &= \sqrt{3}a \end{aligned}$$

செங்கோண முக்கோணி ABD ஐக் கருதும்போது,

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

செங்கோண முக்கோணி ABD ஐக் கருதும்போது,

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

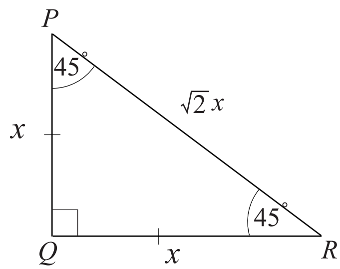
$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

இதேபோன்று 45° கோணத்தின் திரிகோணகணித விகிதங்களைப் பெற்றுக் கொள்வதற்காக இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணி PQR ஐப் பயன்படுத்துவோம். அதில் செங்கோணத்தை அடக்கும் பக்கங்களின் நீளங்கள் x எனக் கொண்டால்,

பைதகரசின் தேற்றப்படி $PR^2 = x^2 + x^2$

$= 2x^2$

$\therefore \quad PR = \sqrt{2}x$



அதற்கேற்ப $\sin 45^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\cos 45^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

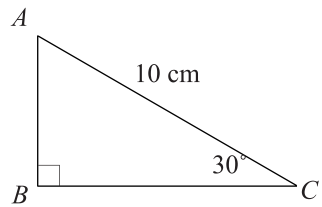
$$\tan 45^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{x}{x} = 1$$

$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ கோணங்களுக்குப் பெறப்பட்ட விகிதங்கள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC இல் $\hat{B}$ செங்கோணமும் $A\hat{C}B = 30^\circ$ உம் பக்கம் AC இன் நீளம் 10cm உம் ஆகும். AB, BC ஆகிய பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.



உருவின்படி $\sin 30^\circ = \dfrac{AB}{AC}$

$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{10} \quad (\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ என்பதால்})$$

$$AB = 5$$

$\therefore$ பக்கம் AB யின் நீளம் 5 cm ஆகும்.

$$\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC}$$

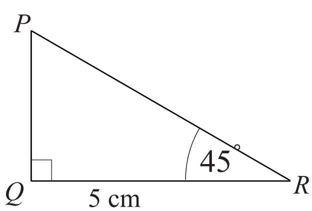
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{10}$$

$$\therefore \quad BC = 5\sqrt{3}$$

$\therefore$ பக்கம் BC யின் நீளம் $5\sqrt{3}$ cm ஆகும்.

உதாரணம் 2

செங்கோண முக்கோணி PQR இல் செம்பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்க.



$$\cos 45^\circ = \frac{QR}{PR}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{PR}$$

$$\therefore \quad PR = 5\sqrt{2}$$

$\therefore$ செம்பக்கத்தின் நீளம் $5\sqrt{2}$ cm ஆகும்.

உதாரணம் 3

5 m நீளமான ஓர் ஏணி கிடையுடன் 60° கோணத்தை அமைக்கும் வகையில் நிலைக்குத்தான ஓர் சுவரில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் மேல் முனையானது கிடைத்தளத்திலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் தொட்டுக்கொண்டிருக்கும் எனக் காண்க.

நிலைக்குத்துச் சுவருக்கும் கிடைத் தரைக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் 90° என்பதால் உருவில் $A\hat{B}C = 90^\circ$ ஆகும்.

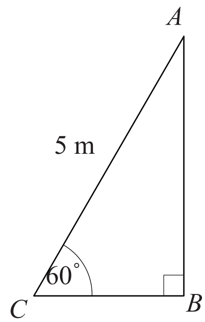
செங்கோண முக்கோணி ABC இல்,

$$\frac{AB}{AC} = \sin 60^\circ$$

$$\therefore \frac{AB}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore AB = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4.325 \ (\sqrt{3} = 1.73 \text{ எனக் கொள்வதால்})$$

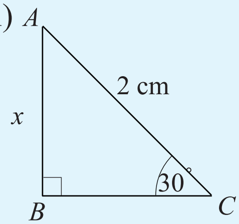


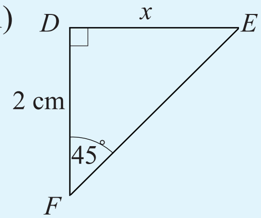
$\therefore$ ஏணியின் மேல் முனையானது கிடைத்தளத்திலிருந்து 4.33 m உயரத்தில் சுவரைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்கும்.

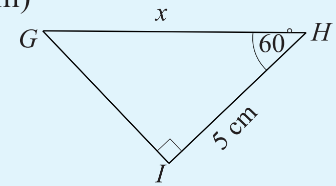
இனி, மேற்குறித்த அட்டவணையிலுள்ள பெறுமானங்களைப் பயன்படுத்திக் கீழேயுள்ள பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

பயிற்சி 18.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப முக்கோணிகளில் x இனால் காட்டப்படும் நீளத்தைக் காண்க.

(i)


(ii)


(iii)


2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானங்களை மேற்குறித்த அட்டவணையிலுள்ள விகிதங்களைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

a. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$ **c.** $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \tan 60^\circ$

b. $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ + \tan 60^\circ$ **d.** $\cos 30^\circ + \sin 60^\circ + \tan 60^\circ$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளை வாய்ப்புப் பார்க்க.

(i) $\sin 30^\circ \ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \ \sin 60^\circ = 1$

(ii) $\cos 60^\circ \ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \ \sin 30^\circ = 0$

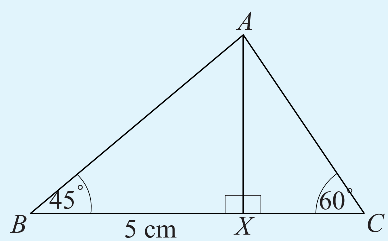
(iii) $\tan 30^\circ = \dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$

4. தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

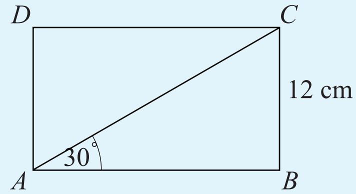
(i) AX இன் நீளம்

(ii) AC யின் நீளம்

ஆகியவற்றைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.7$ எனக் கொள்க.)



5. செவ்வகம் $ABCD$ இன் பக்கம் BC ஆனது 12 cm ஆகும். மூலைவிட்டத்தின் நீளத்தைக் காண்க.



6. அன்ரனா கோபுரமொன்றை நிலைக்குத்தாக வைத்திருப்பதற்காக, அதன் மேல் முனையிலிருந்து 50 cm கீழே கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு கம்பியின் மற்றைய முனை கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 5 m தூரத்தில் கிடைத் தரையில் அமைந்துள்ள ஓர் ஆப்புடன் இறுக்கமாகக் கட்டப்பட்டுள்ளது. கம்பியின் நீளம் 10 m ஆயின்

(i) இத்தகவல்களை ஒரு பருமட்டான உருவில் தருக.

(ii) $\sqrt{3} = 1.7$ எனக் கொண்டு கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

18.4 திரிகோணகணித அட்டவணை

இதுவரை 30°, 45°, 60° ஆகிய கோணங்களுக்கான திரிகோணகணித விகிதங்கள் பற்றி மாத்திரம் கவனத்தில் கொண்டோம். ஆயினும் 0° தொடக்கம் 90° வரையிலான கோணங்களுக்கும் இவ்வாறான விகிதங்கள் உள்ளன. அக்கோணங்களின் திரிகோணகணித விகிதங்கள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. சைன், கோசைன், தான்சன் என்பவற்றுக்காக மூன்று அட்டவணைகள் வெவ்வேறாகத் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளன. அட்டவணையில் உட்படுத்தப்பட்டிருப்பவை கோணங்களின் விகிதங்கள் என்பதால் கோணமொன்றின் அளவீடாகிய பாகை என்பது கலை என்னும் சிறு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு பாகை 60 கலைகளுக்குச் சமனாகும். அதாவது $1^\circ = 60'$

சைன், கோசைன், தான்சன் ஆகிய எந்தவோர் அட்டவணையிலும் முதலாம் நிரலில் 0° இருந்து 90° வரையிலான கோணங்களின் பெறுமானங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. கீழே ஒரு தான்சன் அட்டவணையின் ஒரு பகுதி தரப்பட்டுள்ளது.

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்சன்கள்
NATURAL TANGENTS

									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·0000	0·0029	0·0058	0·0087	0·0116	0·0145	0·0175	89°	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	·0175	·0204	·0233	·0262	·0291	·0320	·0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	·0349	·0378	·0407	·0437	·0466	·0495	·0524	87	3	6	9	12	15	18	20	23	26
3	·0524	·0553	·0582	·0612	·0641	·0670	·0699	86	3	6	9	12	15	18	20	23	26
4	·0699	·0729	·0758	·0787	·0816	·0846	·0875	85	3	6	9	12	15	18	21	23	26

மேற்குறித்த முதலாவது நிரலில் பாகைகளின் அளவு 0 இலிருந்து 90° வரை குறிக்கப்பட்டுள்ளதுடன் (இங்கு அட்டவணையின் ஒரு பகுதி என்பதால் 0 இலிருந்து 4 வரையான பாகைகள் தரப்பட்டுள்ளன.) மேல் நிரையில் $0'$, $10'$, $20'$, ... $60'$ எனவும் இடைவித்தியாசங்கள் $1'$, $2'$, ... $9'$ எனவும் ஒரு பாகையின் பகுதிகளான கலைப் பெறுமானங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. யாதாயினுமொரு கோணத்தின் விகிதத்தைப் பெற்றுக் கொள்வதற்கு மடக்கை அட்டவணையைப் போன்றே நிரையினதும் நிரலினதும் எண் வழியே உள்ள பெறுமானமும் இடைவித்தியாசங்கள் நிரையிலுள்ள பெறுமானமும் தொடர்புபடுத்திக் கொள்ளப்படும்.

இப்போது மேற்குறிப்பிட்ட திரிகோணகணித அட்டவணைகளை வெவ்வேறாகக் கவனத்தில் கொள்வோம்.

தான்சன் அட்டவணை

இவ்வட்டவணையிலுள்ள விகிதங்கள் 0.0000 இல் தொடங்கி படிப்படியாக அதிகரித்து 1.0000 ஐத் தாண்டிச் சென்று 90° வரை அடையும்போது மிகப்பெரிய பெறுமானத்தை எடுக்கின்றது. கீழே தான்சன் அட்டவணையிலிருந்து பெறப்பட்ட ஒரு பகுதி தரப்பட்டுள்ளது.

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்சன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									මධ්‍යක අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences								
42	.9004	.9057	.9110	.9163	.9217	.9271	.9325	47	5	11	16	21	27	32	37	43	48
43	.9325	.9380	.9435	.9490	.9545	.9601	.9657	46	6	11	17	22	28	33	39	44	50
44	.9657	.9731	.9770	.9827	.9884	.9942	1.0000	45	6	11	17	23	29	34	40	46	51
45°	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0235	1.0295	1.0355	44°	6	12	18	24	30	36	41	47	53
46	.0355	.0416	.0477	.0538	.0599	.0661	.0724	43	6	12	18	25	31	37	43	49	55
47	.0724	.0786	.0850	.0913	.0977	.1041	.1106	42	6	13	19	26	32	38	45	51	57
48	.1106	.1171	.1237	.1303	.1369	.1436	.1504	41	7	13	20	27	33	40	46	53	60
49	.1504	.1571	.1640	.1708	.1778	.1847	.1918	40°	7	14	21	28	34	41	48	55	62

முதலில் $\tan 43^{\circ}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம். $\tan 43^{\circ}$ இற்குரிய பெறுமானமானது 43° பாகை அடங்கியுள்ள நிரை வழியே 0 நிரலிலுள்ள பெறுமானமாகும்.
அதற்கேற்ப, $\tan 43^{\circ} = 0.9325$ ஆகும்.

இனி அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $\tan 48^{\circ} 20'$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம்.

அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி அதற்காக 48° அடங்கியுள்ள நிரைவழியே $20'$ உள்ள நிரல் வரை செல்ல வேண்டும். அங்குள்ள 0. 1237 ஐப் பெறுக. மேலும் $20'$ அடங்கியுள்ள நிரலில் மேலேயுள்ள எண்ணாகிய 1.0117 இல் முழுவெண்பகுதி 1 உள்ளதால் அந்நிரலிலுள்ள எல்லா எண்களுக்கும் முழுவெண்பகுதியை எடுக்க வேண்டும். (அவ்வாறு முதலாவது நிரையில் மாத்திரம் முழுவெண்பகுதி குறிப்பிடப்படுவது அட்டவணையின் தெளிவிற்காக ஆகும்.)

இதற்கேற்ப $\tan 48^{\circ} 20'$ இன் பெறுமானம் 1. 1237 ஆகும்.

இவ்வாறே tan $49^\circ\ 57'$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம். முதலில் $49^\circ\ 50'$ இன் தான்சன் பெறுமானத்தைக் காண வேண்டும்.

அது tan $49^\circ\ 50' = 1.1847$ எனக் கிடைக்கும்.

$57'$ ஆவதற்கு இடைவித்தியாசப் பகுதியில் $7'$ ஐ எடுக்க வேண்டும். அதற்கேற்ப $7'$ இற்குரிய இடைவித்தியாசம் ஆகிய 0.0048 (இங்கு ஒரு நியமமாக இடைவித்தியாசமானது 4 தசம தானங்களைக் கொண்ட ஒரு பெறுமானத்தைக் கருதி அதன் பூச்சியமல்லாத பகுதி மாத்திரம் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.) என்னும் பெறுமானம் 1.1847 உடன் கூட்டப்பட வேண்டும். அப்போது

$$\tan 49^\circ\ 57' = 1.1847 + 0.0048$$
$$= 1.1895$$ எனப் பெறப்படும்.

உதாரணம் 1

(i) $\tan 34^\circ\ 30' = 0.6873$

(ii) $\tan 44^\circ\ 42' = 0.9884 + 0.0011$
$= 0.9895$

(iii) $\tan 79^\circ\ 25' = 5.309 + 0.044$
$= 5.353$

யாதாயினுமொரு கோணத்தின் விகிதத்திலிருந்து ஒத்த கோணத்தைப் பெற்றுக் கொள்வது மடக்கை அட்டவணையில் முரண் மடக்கையைப் பெற்றுக்கொள்ளும் முறையிலேயே செய்யப்படும்.

$\tan\theta = 1.1054$ ஆகவுள்ள கோணம் θ வைப் பெற்றுக் கொள்வோம்.

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்சன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1·0000	1·0058	1·0117	1·0176	1·0235	1·0295	1·0355	44	6	12	18	24	30	36	41	47	53
46	·0355	·0416	·0477	·0538	·0599	·0661	·0724	43	6	12	18	25	31	37	43	49	55
47	·0724	·0786	·0850	·0913	·0977	·1041	·1106	42	6	13	19	26	32	38	45	51	57
48	·1106	·1171	·1237	·1303	·1369	·1436	·1504	41	7	13	20	27	33	40	46	53	60
49	·1504	·1571	·1640	·1708	·1778	·1847	·1918	40°	7	14	21	28	34	41	48	55	62

1.1054 இற்குக் கிட்டிய அதிலும் குறைந்த ஒரு பெறுமானத்தை 1.1041 ஐ அட்டவணையிலிருந்து பெற்றுக்கொள்ளும்போது அது $47^\circ\ 50'$ என்பதைக் காணலாம். அது 1.1054 ஐப் பெறுவதற்கு 1.1041உடன் மேலும் 0.0013 ஐக் கூட்ட வேண்டியுள்ளது. எனவே 0.0013 (அதாவது, இடைவித்தியாசப் பகுதியில் 13 உள்ள எண் பெறுமானத்திற்கு) இற்கு ஒத்த கலைப் பெறுமானத்தை இப்பாகையின் எண்ணிக்கையுடன் கூட்ட வேண்டும். அப்பெறுமானம் $2'$ ஆகும். எனவே தான்சன் 1.1054 இற்குரிய கோணமானது $47^\circ\ 50' + 2' = 47^\circ\ 52'$ ஆகும்.

எனவே $\theta = 47^\circ\ 52'$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

(i) $\tan\theta = 0.3706$ ஆகும்போது

$\theta = 20^\circ 20'$

(ii) $\tan\theta = 0.4774$ ஆகும்போது

$\theta = 25^\circ 30' + 1'$

$= 25^\circ 31'$

(iii) $\tan\theta = 0.8446$ ஆகும்போது

$\theta = 40^\circ 11'$

சைன் அட்டவணை

இவ்வட்டவணையில் 0.0000 இருந்து 1.0000 வரையிலான பெறுமானங்கள் உள்ளன. தான்சன் அட்டவணையைப் போன்று இங்கும் முதலாம் நிரலில் எண்கள் கோணத்தின் பெறுமானம் 0° இலிருந்து 90° வரை நீண்டு செல்கிறது. மேலேயுள்ள நிரையில் எண்கள் $0', 10', 20', 30', \ldots, 60'$ எனவும் இடைவித்தியாச நிரையில் $1', 2', 3', \ldots, 9'$ கோணத்தின் கலைப் பெறுமானங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. தான்சன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திய முறையிலேயே இவ்வட்டவணையும் பயன்படுத்தப்படும்.

குறிப்பு தான்சன் அட்டவணையில் பெறுமானங்கள் 0 இலிருந்து மிகப்பெரிய பெறுமானங்கள் வரை அதிகரித்துச் சென்றாலும் சைன் அட்டவணையில் 0 இலிருந்து 1 வரையுள்ள பெறுமானங்கள் மாத்திரமே உள்ளன. இதற்குக் காரணம் ஒரு முக்கோணியில் கோணமொன்றின் சைன் விகிதம் எப்போதும் 0 இற்கும் 1 இற்கும் இடையில் அமைந்திருப்பதாகும்.

$\sin 33^\circ 27'$ இன் பெறுமானத்தை அட்டவணையிலிருந்து பெற்றுக் கொள்வோம்.

இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
30°	0·5000	0·5025	0·5050	0·5075	0·5100	0·5125	0·5150	59	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	·5150	·5175	·5200	·5225	·5250	·5275	·5299	58	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	·5299	·5324	·5348	·5373	·5398	·5422	·5446	57	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	·5446	·5471	·5495	·5519	·5544	·5568	·5592	56	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	·5592	·5616	·5640	·5664	·5688	·5712	·5736	55	2	5	7	10	12	14	17	19	22

முதலில் $\sin 33^\circ 20' = 0.5495$ எனக் குறித்துக்கொண்டு மீதி $7'$ ஐப் பெற்றுக் கொள்வதற்காக 33° நிரையில் இடைவித்தியாசத்தில் $7'$ இற்கு ஒத்த பெறுமாகிய 0.0017 ஐக் கூட்டுக.

அப்போது $\sin 33^\circ 27' = 0.5495 + 0.0017$

$= 0.5512$

உதாரணம் 3

(i) $\sin 75^\circ\, 44' = 0.9689 + 0.0003$
$= 0.9692$

(ii) $\sin 45^\circ\, 34' = 0.7133 + 0.0008$
$= 0.7141$

(iii) $\sin 39^\circ\, 50' = 0.6406$

தற்போது யாதாயினும் sin பெறுமானத்திற்குரிய பொருத்தமான கோணத்தைப் பெற்றுக்கொள்வதற்கு அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவோம். அதுவும் தான்சன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திய முறையிலேயே ஆகும்.

$\sin\theta = 0.5075$ ஆகும் கோணம் θ வை முதலில் காண்போம். இப்பெறுமானம் அட்டவணையில் 30° நிரையிலும் 30 நிரலிலும் உண்டு. அதற்கேற்ப $\theta = 30^\circ\, 30'$. ஆகும். இனி இன்னொரு கோணத்தின் பெறுமானத்தை அட்டவணை யிலிருந்து காண்போம். $\sin\theta = 0.5277$ ஆகவுள்ள கோணம் θ வைக் காண்பதற்கு 0.5277 இல்லாததால் அதற்குக் கிட்டிய சிறிய எண்ணை அட்டவணையிலிருந்து 0.5275 எனப் பெறலாம். இதற்கு ஒத்த கோணம் $31^\circ\, 50'$ ஆகும். எஞ்சிய 0.0002 இற்கு ஒத்ததான கலைப் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு அதே நிரையிலுள்ள இடைவித்தியாசப் பகுதியைப் பார்க்க. அங்கு 2 என்னும் பெறுமானதுக்கு ஒத்த கலை 1 ஆகும். எனவே சைன் பெறுமானம் 0.5277 ஆகவுள்ள கோணம் $31^\circ\, 51'$ ஆகும்.
அதாவது $\sin\theta = 0.5277$ ஆயின் $\theta = 31^\circ\, 51'$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

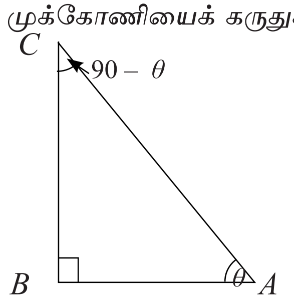
பின்வரும் சைன் பெறுமானங்களுக்குரிய θ வின் பெறுமானம் காண்க.

(i) $\sin\theta = 0.5831$ (ii) $\sin\theta = 0.7036$ (iii) $\sin\theta = 0.9691$

(i) $\therefore\ \theta = 35\,40'$ (ii) $\therefore\ \theta = 44^\circ\, 43'$ (iii) $\therefore\ \theta = 75^\circ\, 43'$

கோசைன் அட்டவணை

கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணியைக் கருதுக.



இது $A\hat{B}C = 90^\circ$ ஆகவுள்ள செங்கோண முக்கோணி ஆகும். இம்முக்கோணியில் $B\hat{A}C = \theta$ எனக் கொள்வோம். அப்போது முக்கோணியின் கோணங் களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால் $A\hat{C}B = 90^\circ - \theta$ ஆகும்.

$A\hat{C}B$, $B\hat{A}C$ ஆகிய கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 90° ஆகும். இவ்வாறான கோணச் சோடிகளை நிரப்பு கோணங்கள் என அழைப்பதை முன்னைய வகுப்புகளில் கற்றுள்ளீர்கள்.

இந்த முக்கோணி ABC ஐக் கருதினால்,

$$\cos\ \theta = \frac{\hat{A} \text{ யிற்கு எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \frac{AB}{AC} \text{ ஆகும்.}$$

அவ்வாறே

$$\sin(90 - \theta) = \frac{\hat{C} \text{ யிற்கு எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \frac{AB}{AC} \text{ ஆகும்.}$$

இதற்கேற்ப $\cos\theta = \sin(90 - \theta)$ என எமக்குக் கிடைகின்றது.

இத்தொடர்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு முக்கோணியின் ஒரு கோணத்தின் கோசைனைக் கணிக்கலாம்.

உதாரணம் 5

$\cos 58^\circ$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$\cos 58^\circ = \sin(90 - 58)$ (மேலே பெற்ற தொடர்பின்படி)
$= \sin 32$
$= 0.5299$ (மேலே பகுதியில் தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையின்படி)

உதாரணம் 6

$\cos 56^\circ\ 18'$ இன் பெறுமானம் காண்க.

முதலில் $90 - 56^\circ\ 18'$ இன் பெறுமானம் காண்போம். அது $33^\circ\ 42'$ ஆகும். எனவே

$$\cos 56^\circ\ 18' = \sin(90 - 56^\circ\ 18') = \sin 32^\circ 42'$$
$$= 0.5549$$

இவ்வாறே கோசைன் தரப்பட்டுள்ளபோது உரிய கோணத்தையும் காணலாம். அதற்கான ஓர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 7

$\cos\theta = 0.5175$ ஆயின் θ இன் பெறுமானம் காண்க.

இதனை $\sin(90 - \theta) = 0.5175$ என எழுதுவோம். பின்னர் சைன் பெறுமானம் 0.5175 ஆகும் கோணத்தைக் காண்போம். அட்டவணையின்படி அது $31^\circ\ 10'$ ஆகும். எனவே $90 - \theta = 31^\circ\ 10'$ என எழுதலாம்.

இச்சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதால் θ வின் பெறுமானம் காணலாம். அப்போது $\theta = 90 - 31^\circ\ 10' = 58^\circ\ 50'$ என θ வின் பெறுமானம் பெறப்படும்.

குறிப்பு ஒரு முக்கோணியின் கோணத்தின் கோசைனும் எப்போதும் சைனைப் போன்று 0 இற்கும் 1 இற்கும் இடையிலுள்ள பெறுமானமாகும். மேற்குறித்த உதாரணங்களில் தரப்பட்ட முறைகளுக்கு மேலதிகமாக சைன் அட்டவணையிலிருந்தும் ஒரு கோணத்தின் கோசைனைக் காணலாம். சைன் அட்டவணையில் இடை வித்தியாசங்களுக்கு முன்னே உள்ள நிரலில் தரப்பட்டுள்ளவை அட்டவணையில் முதலாவது நிரலில் உள்ள கோணங்களை 90 பாகையிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட பெறுமானங்களே என்பதை அவதானிக்கவும். இப்பெறுமானங்களைப் பயன்படுத்தியும் கோசைனைக் காணலாம். ஆயினும் இடைவித்தியாசத்தைக் கணிக்கும்போது உரிய பெறுமானங்களைக் கழிக்க வேண்டும். இது சற்றுக் கடினமானதும் சிக்கலானதும் என்பதால் இயலுமான எல்லாச் சந்தர்ப்பங்களிலும் மேலேயுள்ள உதாரணங்களில் தரப்பட்டுள்ளவாறு நிரப்பிக் கோணத்தின் சைன் பெறுமானத்தைக் கண்டு கோசைன் பெறுமானத்தைக் காண்பது பொருத்தமானது.

கோசைன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கோணங்களைக் காணும் முறையை இப்போது ஆராய்வோம்.

80°	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872	0.9877	9	0	1	1	2	2	3	3	4	4
81	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	8	0	1	1	2	2	3	3	3	4
82	.9903	.9907	.9911	.9914	.9918	.9922	.9925	7	0	1	1	2	2	2	3	3	3
83	.9925	.9929	.9932	.9936	.9939	.9942	.9945	6	0	1	1	1	2	2	2	3	3
84	.9945	.9948	.9951	.9954	.9957	.9959	.9962	5	0	1	1	1	1	2	2	2	3
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974	0.9976	4									
86	.9976	.9978	.9980	.9981	.9983	.9985	.9986	3									
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993	.9994	2									
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998	.9998	1									
89	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින

இயற்கைக் கோசைன்கள்

NATURAL COSINES

உதாரணம் 8

அட்டவணையிலிருந்து $\cos 4^\circ\, 20'$ இன் பெறுமானம் காண்போம். வலதுபக்க "பாகை" நிரலில் 4° ஐயும் கீழே கலை நிரலில் $20'$ ஐயும் எடுக்க வேண்டும். 4° கோணத்துக்குரிய நிரலில் அதற்கு இடதுபக்கத்திலுள்ள $20'$ எடுக்கும்போது $\cos 4^\circ\, 20' = 0.9971$ ஆகும்.

உதாரணம் 9

தற்போது $\cos 9^\circ\, 26'$ இன் பெறுமானம் காண்போம்.

அப்போது $\cos 9^\circ\, 20' = 0.9868$ அதே நிரையில் $6'$ இற்கு ஒத்த பெறுமானம் 0.0003 ஆகும்.

இனிச் கோசைன் பெறுமானத்தைப் பெற்றுக்கொள்ளும்போது இடைவித்தியாச நிரல்களிலுள்ள பெறுமானங்களைக் கழிக்க வேண்டும். அதற்கேற்ப

$$\cos 9^\circ\, 26' = 0.9868 - 0.0003$$
$$= 0.9865$$

உதாரணம் 10

$\cos \theta = 0.4374$ ஆகவுள்ள கோணத்தைக் காண்போம்.

25	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358	0.4384	64	3	5	8	10	[illegible]	16	18	21	24
26	.4348	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	.4540	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669	.4695	62	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823	.4848	61	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975	.5000	60°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
⋮								⋮									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

அட்டவணையில் 0.4374 இற்குக் குறைந்த கிட்டிய பெறுமானம் 0.4358 ஆகும். அது $64^\circ\, 10'$ ஆகும்.

0.4374 ஆவதற்குக் குறைவாக உள்ள 0.0016 ஆனது அமைந்திருப்பது இடை வித்தியாசம் $6'$ இலாகும். இக்கலை எண்ணிக்கையைக் கழிக்கும்போது

$$64^\circ\, 10' - 6' = 64^\circ\, 4'$$

$$\therefore\ \cos \theta = 0.4374 \text{ எனின் } \theta = 64^\circ\, 4'$$

பயிற்சி 18.4

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பெறுமானத்தையும் தான்சன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

a. $\tan 25^{\circ}$ **b.** $\tan 37^{\circ}$ **c.** $\tan 40^{\circ}\ 54'$

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தான்சன் பெறுமானத்திற்குரிய θ வைக் காண்க.

a. $\tan \theta = 0.3214$ **b.** $\tan \theta = 0.7513$ **c.** $\tan \theta = 0.9432$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பெறுமானத்தையும் சைன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

a. $\sin 10^{\circ}\ 30'$ **b.** $\sin 21^{\circ}\ 32'$ **c.** $\sin 25^{\circ}\ 57'$

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சைன் பெறுமானத்திற்குமுரிய θ ஐக் காண்க.

a. $\sin \theta = 0.5000$ **b.** $\sin \theta = 0.4348$ **c.** $\sin \theta = 0.6437$

5. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொன்றின் பெறுமானத்தையும் கோசைன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க. விடையின் செவ்வைத் தன்மையை சைன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

a. $\cos 5^{\circ}\ 40'$ **b.** $\cos 29^{\circ}\ 30'$ **c.** $\cos 44^{\circ}\ 10'$

6. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோசைன் பெறுமானத்திற்கும் பொருத்தமான θ வின் பெறுமானம் காண்க.

a. $\cos \theta = 0.4358$ **b.** $\cos \theta = 0.6450$ **c.** $\cos \theta = 0.9974$

18.5 திரிகோணகணித அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

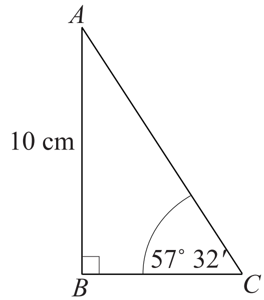
இதற்கு முன்னர் $30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}$ கோணங்களுடன் மாத்திரம் நாம் பிரசினம் தீர்த்தாலும் இப்பொழுது எந்தவொரு கோணம் இருப்பினும் தீர்க்கலாம். திரிகோணகணிதம் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள விடயங்களைக் கவனத்தில்கொள்வது முக்கியமானதாகும்.

1. பொருத்தமான ஒரு செங்கோண முக்கோணியைக் கருதுதல்
2. அம்முக்கோணியில் பொருத்தமான ஒரு கோணத்தைத் தெரிந்தெடுத்தல்
3. அக்கோணத்திற்கான பொருத்தமான திரிகோணகணித விகிதமொன்றைப் பயன்படுத்தல்

இதற்கான சில உதாரணங்களை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள செங்கோண முக்கோணி ABC இல் உள்ள அளவீடுகளுக்கேற்ப பக்கம் AC இன் நீளத்தைக் காண்க.



முக்கோணியில் தரப்பட்டுள்ள கோணம் C ஆகும். அதற்கு எதிரேயுள்ள பக்கம் தரப்பட்டுள்ளதுடன் செம்பக்கத்தின் நீளத்தைக் காணவேண்டும். எனவே எதிர்ப் பக்கம், செம்பக்கம் தொடர்பான சைன் விகிதத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$\sin 57^\circ\, 32' = \frac{AB}{AC}$$

$$0.8437 = \frac{10}{AC}$$

$$\therefore \quad AC = \frac{10}{0.8437}$$

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி இவ்வகுத்தலைச் செய்யலாம்.

$$AC = \frac{10}{0.8437}$$

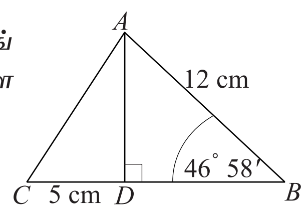
அப்போது, $\lg AC = \lg \dfrac{10}{0.8437}$

$$= \lg 10 - \lg 0.8437$$
$$= 1 - \bar{1}.9262$$
$$= 1.0738$$
$$\therefore\ AC = \text{antilog } 1.0738$$
$$\therefore\ AC = 11.85$$

எனவே, AC இன் நீளம் (இரண்டு தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாக) 11.85 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2

முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC யிற்குச் செங்குத்தாக AD வரையப்பட்டுள்ளது. உருவிலுள்ள தகவல்களின்படி $A\hat{C}B$ இன் பெறுமானம் காண்க.



இங்கு கோணம் $A\hat{C}B$ ஐக் காண்பதற்காகக் கருத்திற் கொள்ளவேண்டிய முக்கோணி ADC ஆகும். அம்முக்கோணியின் இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்கள் தெரியுமாயின் கோணம் $A\hat{C}B$ ஐக் காணலாம்.

இங்கு ஒரு பக்கத்தின் நீளமாகிய CD இன் நீளம் 5 cm எனத் தரப்பட்டுள்ளது. இன்னொரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண வேண்டும். இதற்கு முக்கோணி ADB ஐக் கருதி AD ஐக் காணவேண்டும். எனவே முக்கோணி ADB இற்கு சைன் விகிதத்தைப் பிரயோகித்து AD யின் நீளத்தை முதலில் காண்போம்.

$$\sin\ 46^\circ\ 58' = \frac{AD}{AB}$$

$$0.7310 = \frac{AD}{12}$$

$$12 \times 0.7310 = AD$$

$$\therefore \quad AD = 8.7720 \text{ cm}$$

இனி, செங்கோண முக்கோணி ACD யில், $\tan A\hat{C}D = \frac{AD}{CD}$

$$= \frac{8.7720}{5}$$

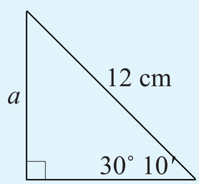
$$\therefore \quad \tan A\hat{C}D = 1.7544$$

$$\therefore \quad A\hat{C}D = 60^\circ\ 18'$$

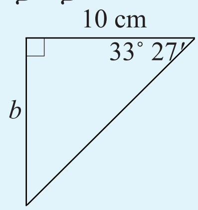
பயிற்சி 18.5

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு முக்கோணியிலும் ஆங்கில அட்சரங்களினால் தரப்பட்டுள்ள பக்கங்களின் நீளத்தைக் காண்க.

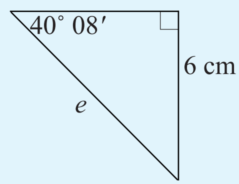
(i)



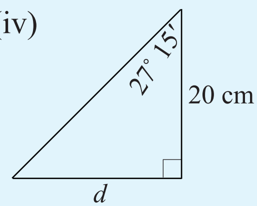
(ii)



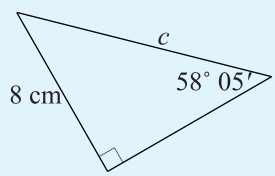
(iii)



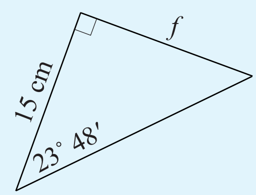
(iv)



(v)

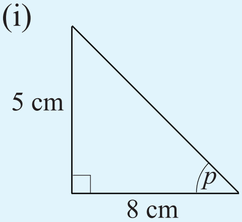


(vi)

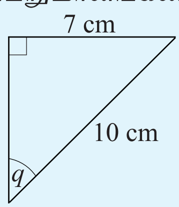


2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு முக்கோணியிலும் ஆங்கில அட்சரங்களினால் தரப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

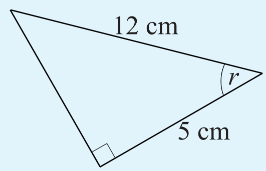
(i)



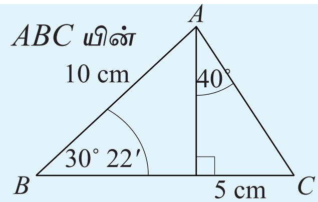
(ii)



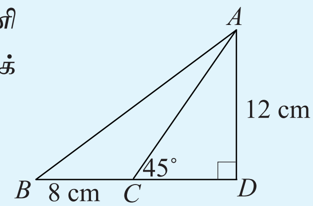
(iii)



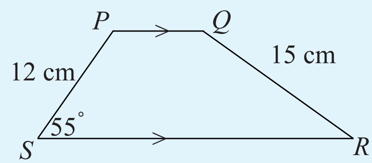
3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப முக்கோணி ABC யின்
   (i) சுற்றளவு
   (ii) பரப்பளவு
   ஆகியவற்றைக் காண்க.



4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப, முக்கோணி ABC இல், $A\hat{B}C$ இன் பெறுமானம் $30^\circ\ 58'$ எனக் காட்டுக.

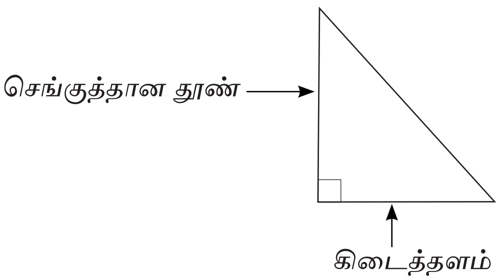


5. சரிவகம் $PQRS$ இல் $SR > PQ$ ஆகும். $PS = 12\text{ cm}$ உம் $QR = 15\text{ cm}$ உம் ஆயின் $Q\hat{R}S$ இன் பெறுமானம் காண்க.



18.6 நிலைக்குத்துத் தளத்தின் கோணங்கள்

தரைக்குச் சமாந்தரமான தளம் கிடைத்தளமாகும். கிடைக்குச் செங்குத்தான தளம் நிலைக்குத்துத் தளமாகும். நிலத்துக்குச் செங்குத்தாக நாட்டப்பட்டுள்ள ஒரு தூண் நிலைக்குத்துத் தூணாகும். அவ்வாறான ஓர் அமைப்பு உருவில் தரப்பட்டுள்ளது.



ஏற்றக் கோணம், இறக்கக் கோணம் என்பவை உட்பட்ட அளவிடைப் படங்களிலிருந்து ஒரு பொருளின் அமைவைக் காண்பது பற்றி தரம் 10 இல் நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். திரிகோணகணித விகிதங்களிலிருந்து ஒரு பொருளின் அமைவைக் காண்பது தொடர்பாகக் கற்போம். அதற்காகக் கீழேயுள்ள உதாரணத்தை ஆராய்ந்து பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

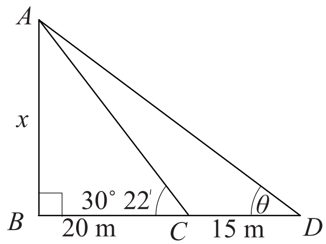
AB என்னும் நிலைக்குத்தான ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 20 m தொலைவிலுள்ள புள்ளி C இல் நிற்கும் ஒருவர் கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தை $30^\circ\ 22'$ எனக் காண்கின்றார். அவர் கோபுரத்திற்கு எதிர்த்திசையில் ஒரு நேர்கோட்டு வழியில் 15 m தூரம் சென்று மீண்டும் கோபுரத்தின் உச்சியை அவதானிக்கின்றார்.

(i) இத்தகவல்களை ஒரு பருமட்டான படத்தில் தருக.

(ii) கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கிட்டிய மீற்றரில் காண்க.

(iii) இரண்டாவது அவதானிப்பின்போது கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.

(i)



(ii) கோபுரத்தின் உயரத்தை x எனக் கொள்வோம்.

அப்போது செங்கோண முக்கோணி ABC இல்,

$$\frac{AB}{BC} = \tan 30^\circ\ 22'$$

$$\frac{x}{20} = \tan 30^\circ\ 22'$$

$$x = 20 \tan 30^\circ\ 22'$$
$$= 20 \times 0.5859$$
$$= 11.718$$

$\therefore$ கோபுரத்தின் உயரம் அண்ணளவாக 12 m ஆகும்.

(iii) D இலிருந்து கோபுரத்தின் உச்சி தெரிகின்ற ஏற்றக் கோணம் θ என்போம்.

அப்போது செங்கோண முக்கோணி ABD இல்,

$$\frac{AB}{BD} = \tan \theta$$

$$\frac{12}{35} = \tan \theta$$

$$0.3428 = \tan \theta$$
$$\tan \theta = 0.3428$$
$$\therefore \quad \theta = 18^\circ\ 55'$$

$\therefore$ இரண்டாவது அவதானிப்பின்போது கோபுரத்தின் உச்சி தெரிகின்ற ஏற்றக் கோணம் $18^\circ\ 55'$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

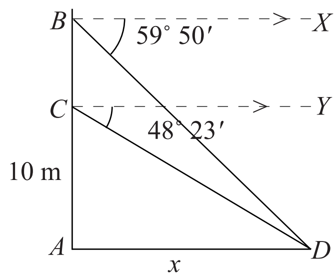
சில மாடிகளைக் கொண்ட ஒரு நிலைக்குத்தான கட்டடமொன்றின் தரை மட்டத்திலிருந்து 10 m உயரத்திலுள்ள ஒரு யன்னலின் வழியாக வெளியே பார்க்கும் ஒருவருக்கு கட்டடம் அமைந்துள்ள நிலத்தில் தொலைவில் நிறுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு மோட்டார் சைக்கிள் $48^\circ\ 23'$ இறக்கக் கோணத்தில் தெரிகின்றது. அதே சந்தர்ப்பத்தில் அவர் கட்டடத்தின் மேல் மாடிக்குச் சென்று அங்குள்ள ஒரு யன்னலினூடாக முன்னர் அவதானித்த மோட்டார் சைக்கிளை அவதானித்தபோது அதை $59^\circ\ 50'$ இறக்கக் கோணத்தில் காண்கின்றார்.

(i) இத்தககவல்களை ஒரு பருமட்டான படத்தில் தருக.

(ii) கட்டடத்திலிருந்து மோட்டார் சைக்கிள் நிறுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ள தூரம் யாது?

(iii) கட்டடத்தின் மேல் மாடி யன்னல் வரையிலான உயரத்தைக் கணிக்க.

(i)



(ii) உருவில் ACD ஒரு செங்கோண முக்கோணியாகும். கட்டடத்திலிருந்து மோட்டார் சைக்கிள் வரையிலான தூரம் x எனக் கொள்வோம்.

$Y\hat{C}D = 48^\circ\ 23'$ ஆகும்போது $A\hat{D}C = 48^\circ\ 23'$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

அப்போது செங்கோண முக்கோணி ADC இல்

$$\frac{AC}{AD} = \tan 48^\circ\ 23'$$

$$\frac{10}{x} = \tan 48^\circ\ 23'$$

$$\therefore \frac{10}{\tan 48^\circ\ 23'} = x$$

அதாவது $x = \dfrac{10}{1.1257}$

$= 8.8833$

> x இன் பெறுமானத்தை மடக்கை அட்டவணை மூலம் பெறல்.
>
> $\lg x = \lg 10 - \lg 1.1257$
>
> $= 1 - 0.0515$
>
> $\therefore x = \text{antilog } 0.9485$
>
> $= 8.883$

$\therefore$ கட்டடத்திலிருந்து மோட்டார் சைக்கிளுக்குள்ள தூரம் 8.8833 m ஆகும்.

(iii) செங்கோண முக்கோணி ABD இல் $A\hat{D}B = 59^\circ\ 50'$

$$\frac{AB}{AD} = \tan 59^\circ\ 50'$$

$$\frac{AB}{8.883} = \tan 59^\circ\ 50'$$

$$AB = 8.883 \times 1.7205$$
$$= 15.28$$

$\therefore$ கட்டடத்தின் மேல்மாடி யன்னலுக்கான உயரம் 15.28 m ஆகும்.

மேற்குறித்த உதாரணங்களிற்கேற்ப கீழேயுள்ள பயிற்சிகளில் ஈடுபடுக.

பயிற்சி 18.6

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து பருமட்டான படங்களை வரைக.

(i) AB என்னும் நிலைக்குத்தான ஒரு கோபுரத்தின் உச்சி A ஆகும். கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து சமதளத்தில் 20 m தூரத்தில் நிற்கும் ஓர் அவதானிக்கு கோபுரத்தின் உச்சி $55^\circ\ 20'$ ஏற்றக் கோணத்தில் தெரிகின்றது. அவதானியின் உயரம் 1.5 m ஆகும்.

(ii) 35 m உயரமுடைய ஒரு தற்காலிகக் கூரையின் உச்சியிலிருந்து அதனை சீரமைக்கும் ஒரு தொழிலாளி தற்காலிகக் கூரை அமைந்துள்ள நிலத்தில் தொலைவில் நிறுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு வாகனத்தை 50° இறக்கக் கோணத்தில் காண்கின்றார்.

(iii) நிலைக்குத்தான ஒரு கட்டடத்தின் இரண்டாம் மாடியில் நிற்கும் ஒருவர் கட்டடத்திலிருந்து 75 m தூரத்தில் உள்ள ஒரு வெளிச்ச வீட்டின் உச்சியை $27^\circ\ 35'$ ஏற்றக் கோணத்திலும் அதன் அடியை $41^\circ\ 15'$ இறக்கக் கோணத்திலும் காண்கின்றார்.

(iv) ஒரு பிள்ளை நிலைக்குத்தான கோபுரமொன்றின் உச்சியை 30° ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கின்றது. கோபுரத்தை நோக்கி 25 m நடந்த பின்னர் மீண்டும் கோபுரத்தைப் பார்க்கும்போது அதன் உச்சி 50° ஏற்றக் கோணத்தில் தெரிகின்றது. (பிள்ளையின் உயரத்தைப் புறகணிக்க).

2. 20 m உயரமுடைய ஒரு வெளிச்ச வீட்டின் உச்சியிலுள்ள யன்னலினூடாக வெளியே பார்க்கும் ஒரு பாதுகாப்பு அதிகாரி கடலில் பயணிக்கும் ஒரு கப்பல் $30^\circ\ 15'$ இறக்கக் கோணத்தில் இருப்பதாக அவதானிக்கின்றார். வெளிச்ச வீட்டிலிருந்து கப்பலுக்கு உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

3. நிலைக்குத்தான ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து அதே மட்டத்தில் 20 m தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பார்க்கும்போது கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் $35^\circ\ 12'$ ஆகும். கோபுரத்தை நிலைக்குத்தாக வைத்திருப்பதற்காக கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 20 தூரத்தில் ஒரு கம்பியை நன்கு இறுக்கமாக கட்ட வேண்டியுள்ளது. அதற்குத் தேவையான கம்பியின் நீளத்தைக் காண்க. (பார்வையாளரின் உயரத்தை புறக்கணிக்க, கட்டுவதற்காக கம்பியின் அரை மீற்றர் நீளம் தேவை எனக் கொள்க.)

4. நிலைக்குத்தான மின்கம்பத்தின் அடியிலிருந்து அதே மட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பார்க்கும்போது கம்பத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 50° ஆகும். கம்பத்தின் உயரம் 12 m ஆயின் கம்பத்தின் அடியிலிருந்து அவதானிப்புப் புள்ளிக்கு உள்ள தூரத்தைக் காண்க. (அவதானியின் உயரத்தைப் புறக்கனிக்க)

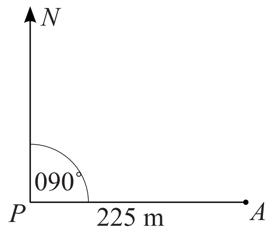
5. ஒரு கிடைத்தரையில் A, B ஆகிய இரண்டு தூண்கள் 200 m இடைவெளியில் அமைந்துள்ளன. தூண் A இன் உச்சியிலிருந்து தூண் B இன் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் $4^\circ\ 10'$ உம் B இன் அடியின் இறக்கக் கோணம் $8^\circ\ 15'$ உம் ஆகத் தெரிகின்றது.
   (i) இத்தகவல்களைப் பருமட்டான படத்தில் தருக.
   (ii) A, B ஆகிய தூண்களின் உயரங்களை வெவ்வேறாகக் கிட்டிய மீற்றரில் காண்க.
   (iii) தூண் A இன் அடியிலிருந்து தூண் B இன் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.

6. ஒன்றுக்கொன்று 20 m தூரத்தில் அமைந்துள்ள நிலைக்குத்தான இரண்டு தூண்களுக்கிடையில் நடுவே நிற்கும் ஒருவருக்கு ஒரு தூணின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 60° எனவும் மற்றைய தூணின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 30° எனவும் தெரிகின்றது. (அவதானியின் உயரத்தைப் புறக்கனிக்க)
   (i) இரண்டு தூண்களினதும் உயரங்களை வெவ்வேறாகக் காண்க.
   (ii) ஒரு தூணின் உச்சியில் கட்டப்பட்ட ஒரு கம்பி மற்றைய தூணின் உச்சியுடன் நன்கு இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது. முடிச்சுகளுக்குப் பயன்படுத்திய பகுதிகளைப் புறக்கணித்து அக்கம்பியின் நீளத்தைக் காண்க. (அவதானியின் உயரத்தைப் புறக்கணிக்க)

18.7 கிடைத்தளத்தின் கோணங்கள்

கிடைத்தளத்தின் அமைவுகளின் திசைகளைக் குறிப்பதற்காகத் திசைகோள்களைப் பயன்படுத்துகின்றோம் என்பதை முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள். திசைகோள் எனப்படுவது வடக்கிலிருந்து ஆரம்பித்து வலஞ்சுழியாக அளவிடும் கோண அளவொன்றாகும். இதனைக் குறிப்பதற்கு மூன்று இலக்கங்களில் எழுதுவது பொதுவான முறையாகும். நவீன நில அளவைக் கருவிகளில் திசைகோளுகளுடன் தூரமும் குறிக்கப்படும்.

புள்ளி P இலிருந்து பார்க்கும்போது கிழக்குத் திசையில் அமைந்துள்ள A இன் திசைகோள் 090° உம் தூரம் 225 m உம் ஆகும். இவ்விபரத்தை இவ்வாறு ஓர் உருவில் காட்டலாம்.



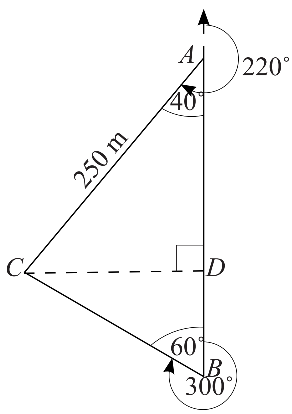
திசைகோளுடனான உருவங்களில் கணித்தல்களைத் திரிகோணகணித விகிதங்களைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கும் முறையை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் அவதானிப்போம்.

உதாரணம் 1

வடக்குத் தெற்காக அமைந்துள்ள நேரான ஒரு பாதையில் A என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து பார்க்கும்போது C என்னும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள ஒரு தூண் A யிற்கு நேர் கீழே அடி 220° திசைகோளிலும் 250 m தூரத்திலும் தெரிகின்றது. நேரான பாதையில் B என்னும் வேறொரு புள்ளியிலிருந்து பார்க்கும்போது C ஆனது 300° திசைகளில் தெரிந்தது.

(i) இத்தகவல்களை ஒரு பரும்படிப் படத்தில் தருக.
(ii) தூணின் அடி C இலிருந்து பாதை AB இற்குள்ள (குறுகிய) தூரத்தைக் காண்க.
(iii) AB இன் நீளத்தைக் காண்க.

(i)



(ii) A இலிருந்து C தெரிகின்ற திசைகோள் 220° எனபதால் $D\hat{A}C = 220^\circ - 180^\circ = 40^\circ$

அப்போது, செங்கோண முக்கோணி ACD இல், $\frac{CD}{AC} = \sin 40^\circ$

$$CD = AC \sin 40^\circ$$
$$CD = 250 \sin 40^\circ$$
$$= 250 \times 0.6428$$
$$= 160.7000$$

$\therefore$ C இலிருந்து பாதை AB இற்குள்ள குறுகியதூரம் 160.7 m ஆகும்.

(iii) பாதை AB இன் நீளம் $= AD + DB$

செங்கோண முக்கோணி ACD இல் $\dfrac{AD}{AC} = \cos 40$

$$AD = AC \cos 40^\circ$$
$$= 250 \times 0.7660$$
$$= 191.5000$$
$$= 191.5 \text{ m}$$

செங்கோண ΔBDC யில் $\tan 60^\circ = \dfrac{CD}{DB}$

$$DB = \frac{CD}{\tan 60^\circ}$$
$$= \frac{160.7}{1.732}$$
$$= 92.78 \text{ m}$$

$\therefore$ AB இன் நீளம் $= 191.5 + 92.78$ m
$= 284.28$ m

பயிற்சி 18.7

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்பப் பரும்படிப் படங்களை வரைக.
   (i) A இலிருந்து 080° திசைகோளில் 12 m தூரத்தில் B அமைந்துள்ளது.
   (ii) P இலிருந்து 120° திசைகோளில் 50 m தூரத்தில் Q உம், Q இலிருந்து 040° திசைகோளில் 25 m தூரத்தில் R உம் அமைந்துள்ளன.
   (iii) X இலிருந்து 150° திசைகோளில் 30 m தூரத்திலும் Y உம், Y இலிருந்து 200° திசைகோளில் 100 m தூரத்தில் Z உம், Z இலிருந்து 080° திசைகோளில் 50 m தூரத்தில் A உம் அமைந்துள்ளன.

2. A என்னும் இடத்திலிருந்து பயணத்தைத் தொடங்கும் ஒரு மோட்டார் சைக்கிளோட்டி, கிழக்குத் திசையில் 8 km தூரம் சென்று, அங்கிருந்து வடக்குத் திசைக்குத் திரும்பி 6 km சென்று B என்னும் இடத்தில் தனது பயனத்தைதை முடித்தான்.
   (i) இத்தகவல்களை ஒரு பரும்படிப் படத்தில் தருக.
   (ii) B இலிருந்து A இன் திசைகோளைக் காண்க.
   (iii) A, B ஆகியவற்றுக்கிடையிலுள்ள குறுகிய தூரத்தைக் காண்க.

3. ஒரு கப்பல் A என்னும் துறைமுகத்திலிருந்து புறப்பட்டு 040° திசைகோளில் 150 km பயணம் செய்து துறைமுகம் B ஐ அடைகிறது. துறைமுகம் B ஆனது
 (i) துறைமுகம் A இலிருந்து எவ்வளவு தூரம் வடக்கே அமைந்துள்ளது ?
 (ii) துறைமுகம் A இலிருந்து எவ்வளவு தூரம் கிழக்கே அமைந்துள்ளது ?

4. ஓர் ஆற்றின் அகலத்தை அளக்க முயற்சிசெய்யும் ஒரு மாணவன் அங்கு நேர்கோடாக உள்ள ஓர் இடத்தில் ஒரு கரையில் நின்று அதற்குச் செங்குத்தாக மறு கரையிலுள்ள ஒரு மரத்தைத் தெரிந்தெடுத்தான். அவன் நிற்கும் புள்ளியை A எனப் பெயரிட்டு, அங்கிருந்து கரையோரமாக 75 m சென்று பார்த்தபோது மரம் அமைந்துள்ள திசைகோள் 210° என அவதானித்தான். திசைக்கோளுடன் பரும்படிப் படமொன்றை வரைந்து திரிகோணகணித விகிதங்களைப் பயன்படுத்தி ஆற்றின் அகலத்தைக் காண்க.

5. வனப் பாதுகாப்பை மேற்கொள்ளும் ஒரு படை அணியினர் வனத்தின் தொலை தூரத்தில் தீயின் அடையாளத்தைக் கண்டு பரிசோதனையை மேற்கொண்டனர். அவர்கள் அவ்வேளையில் பெற்றுக்கொண்ட தகவல்களின்படி, முகாம் C யிலிருந்து 070° திசைகோளில் A என்னும் பிரதான பாதை வழியே 2.5 km தூரம் சென்று P என்னும் இடத்தையும் அவ்விடத்திலிருந்து 340° திசைகோளில் 1.5 km தூரம் சென்று F என்னும் தீ காணப்பட்ட இடத்தை அடைகின்றனர்.
 (i) இத்தகவலை ஒரு பருமட்டான உருவில் காட்டுக.
 (ii) படையணியினர் பிரதான பாதையிலிருந்து தீ காணப்பட்ட இடத்திற்கு விரைவாகச் செல்வதற்குப் பிரதான பாதையிலிருந்து P என்னும் இடத்தைத் திரும்பும் இடமாகத் தேர்ந்தெடுப்பது பொருத்தமானது என்பதை காரணங்களுடன் காட்டுக.
 (iii) படையினர் தங்களது முகாமிலிருந்து முதலில் தீயை அவதானித்த திசைகோள் யாது ?

18.8 கணிகருவியைப் பயன்படுத்தி திரிகோணகணித விகிதங்களைக் காணல்

விஞ்ஞானக் கணிகருவியைப் பயன்படுத்தி திரிகோணகணித விகிதங்கள் தொடர்புபட்ட கணித்தல்களை எவ்வாறு செய்யலாம் எனப்பார்ப்போம். அதற்கு கணிகருவியில் MODE சாவியைப் பயன்படுத்தி காட்சிதிரையில் "*DEG*" எனக் காணப்பட வேண்டும். உதாரணங்களின் மூலம் இக்கணித்தல்களை அவதானிப்போம்.

உதாரணம் 1

(i) $\tan 35^\circ$ (ii) $\sin 35^\circ$ (iii) $\cos 35^\circ$ ஆகிய பெறுமானங்களை இயக்க வேண்டிய முறையை ஒரு பாய்ச்சற்கோட்டுப் படம் மூலம் தருக.

(i) $\tan 35^\circ$ ON — 3 — 5 — tan — = ⟶ 0.7002

(ii) $\sin 35^\circ$ ON — 3 — 5 — sin — = ⟶ 0.5736

(iii) $\cos 35^\circ$ ON — cos — 3 — 5 — = ⟶ 0.8192

உதாரணம் 2

(i) $\tan\theta = 1.2131$ (ii) $\sin\theta = 0.7509$ (iii) $\cos\theta = 0.5948$ ஆகவுள்ள போது ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் θஇன் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு சாவிகளை இயக்க வேண்டிய முறையை ஒரு பாய்ச்சற் கோட்டுப்படம் மூலம் தருக.

(i) [ON] — [1] — [.] — [2] — [1] — [3] — [1] — [SHIFT] — [tan] — [=] ⟶ [50.5°]

(ii) [ON] — [0] — [.] — [7] — [5] — [0] — [4] — [SHIFT] — [sin] — [=] ⟶ [48.66°]

(iii) [ON] — [SHIFT] — [cos] — [0] — [.] — [5] — [9] — [4] — [8] — [=] ⟶ [53.5°]

குறிப்பு : கோணங்கள் பாகைகளில் மட்டும் பெறப்பட்டுள்ளதை அவதானிக்கவும் உதாரணம் $50.5^\circ = 50^\circ\ 30'$

பயிற்சி 18.8

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பெறுமானங்களுக்கு (a) tan பெறுமானம் (b) sin பெறுமானம் (c) cos பெறுமானம் ஆகியவற்றைக் கணிகருவியைப் பயன்படுத்திப் பெறுவதற்கு இயக்க வேண்டிய சாவிகளைப் பாய்ச்சற் கோட்டுப் படம் மூலம் தருக.

a. 40° **b.** 75° **c.** 88° **d.** 43°

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் θ இன் பெறுமானத்தைப் பெற்றுக் கொள்ள கணிகருவியை இயக்க வேண்டிய முறையைப் பாய்ச்சற் கோட்டுப் படம் மூலம் தருக.

a. $\sin\theta = 0.9100$ **d.** $\cos\theta = 0.1853$ **g.** $\tan\theta = 0.5736$
b. $\sin\theta = 0.7112$ **e.** $\cos\theta = 0.7089$ **h.** $\tan\theta = 0.7716$
c. $\sin\theta = 0.1851$ **f.** $\cos\theta = 0.4550$ **i.** $\tan\theta = 0.9827$

பலவினப் பயிற்சி

1. P, Q ஆகிய இரண்டு கப்பல்கள் ஒரே துறைமுகத்திலிருந்தும் ஒரே தடவையில் புறப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு கப்பலும் மணிக்கு 18 கிலோமீற்றர் என்னும் சமனான வேகத்தில் பயணிக்கின்றன. P ஆனது துறைமுகத்திலிருந்து 010° திசைகோளிலும் Q ஆனது துறைமுகத்திலிருந்து 320° திசைகோளிலும் பயணிக்கின்றன. ஒரு மணித்தியாலத்தின் பின்னர் இரண்டு கப்பல்களுக்குமிடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

2. ஒரு பாதையின் இருமருங்கிலுள்ள இரண்டு கட்டடங்களில் ஒன்று மற்றையதிலும் 9 m உயரமானதாகும். உயரம் கூடிய கட்டடத்தின் அடியிலிருந்து பார்க்கும்போது மற்றைய கட்டடத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் $42^\circ\ 20'$ ஆகும். உயரம் குறைந்த கட்டடம் 15 m உயரமுடையதாயின், அவதானியின் உயரத்தைப் புறக்கணித்து,

(i) இரண்டு கட்டடங்களுக்குமிடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

(ii) உயரம் குறைந்த கட்டடத்தின் அடியிலிருந்து உயரம் கூடிய கட்டடத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.

3. முக்கோணி ABC இல், $AB = 10$ cm, $BC = 7$ cm, $A\hat{B}C = 30^\circ\ 26'$, A இலிருந்து BC இற்கு வரைந்த செங்குத்து AX ஆகும். ABC இன் பரப்பளவைக் காண்க.

4. கிடைத்தரையிலுள்ள இரண்டு புள்ளிகளில் கொடிக் கம்பங்கள் நடப்பட்டுள்ளன இரண்டு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோட்டின் மீது A, B என்னும் இரண்டு புள்ளிகள் உள்ளன. A இலிருந்து பார்க்கும்போது கொடிக்கம்பங்களின் உச்சிகளின் ஏற்றக்கோணங்கள் 30°, 60° ஆகும். B இலிருந்து பார்க்கும்போது அவற்றின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 60°, 45° ஆகும். AB இன் நீளம் 10 m ஆயின்,

(i) இரண்டு கொடிக்கம்பங்களினதும் உயரங்களை வெவ்வேறாகக் காண்க.

(ii) இரண்டு கொடிக்கம்பங்களுக்குமிடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

இப்பயிற்சியைக் கணிக்கருவியைப் பயன்படுத்தி செய்துபார்க்க.

19 தாயங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- ஒரு தாயத்தை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- ஒரு தாயத்தின் மூலகங்களையும் வரிசையையும் அறிந்து கொள்வதற்கும்
- தாயங்களை கூட்டவும் கழிக்கவும்
- ஒரு தாயத்தை ஒரு நிறைவெண்ணால் பெருக்கவும்
- ஒரு தாயத்தை இன்னொரு தாயத்தால் பெருக்கவும்
- தாயங்கள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்

19.1 தாயங்கள் அறிமுகம்

தாயங்கள் தொடர்பான கருத்தை 1854 இல் பிரித்தானியக் கணிதவியலாளரான ஆதர் கேலி அறிமுகம் செய்தார். ஓர் எளிய உதாரணம் மூலம் தாயங்களை அறிந்து கொள்வோம்.

ஒரு தவணைப் பரீட்சையில் கணிதம், விஞ்ஞானம் ஆகிய பாடங்களில் விமலன், பாரூக், ராதா ஆகியோர் பெற்ற புள்ளிகள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் தரப் பட்டுள்ளன.

	கணிதம்	விஞ்ஞானம்
விமலன்	75	66
பாரூக்	72	70
ராதா	63	81

அட்டவணையிலுள்ள எண்ரீதியான பெறுமானங்களை ஒரு தாயத்தில் பின்வரும் முறையில் காட்டலாம்.

$$\begin{pmatrix} 75 & 66 \\ 72 & 70 \\ 63 & 81 \end{pmatrix}$$

இங்கு நிரல்களினால் பாடங்களும் நிரைகளினால் மாணவர்களும் குறிக்கப்படுகின்றனர். இதனைப் பின்வருமாறும் தாயவடிவில் காட்டலாம்.

$$\begin{pmatrix} 75 & 72 & 63 \\ 66 & 70 & 81 \end{pmatrix}$$

இங்கு நிரல்களினால் மாணவர்களும் நிரைகளினால் பாடங்களும் குறிக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு நிரைகள், நிரல்கள் வடிவில் அமைக்கப்பட்ட ஓர் எண் கூட்டம் தாயம் எனப்படும்.
அவ்வாறான சில தாயங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$

ஒரு தாயத்திலுள்ள எண்களை தாயத்தின் மூலகங்கள் என அழைப்போம். மூலகங்கள் எண் வடிலும் அட்சரகணிதக் குறியீடு அல்லது கோவை வடிவிலும் இருக்கலாம்.

ஒரு தாயமானது ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துகளால் (Capital letters) பெயரிடப்படும். அட்சரகணிதக் குறியீடுகளை இடும் சந்தர்ப்பங்களில் தாயத்தின் மூலகங்கள் ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களால் (Simple letters) குறிக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

கீழே மூன்று தாயங்கள் பெயரிடப்பட்டுள்ள முறை தரப்பட்டுள்ளது.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & c \\ a & b \end{pmatrix}$$

உதாரணம்2

ஓர் ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் அமைந்துள்ள A, B ஆகிய புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் (0, 5) (4, 3) ஆகும். இத்தகவல்களை ஒரு தாயத்தில் தருக. அதனைப் P எனப் பெயரிடுக.
அட்டவணையாக

	A	B
x	0	4
y	5	3

தாயமாக

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ஒரு தாயத்தின் வரிசை

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ என்னும் தாயத்தைக் கருதுக.

தாயம் A இலுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும். நிரல்களின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும். தாயத்தின் வரிசையானது நிரைகள், நிரல்களிலிருந்து 2×3 எனத் தரப்படும். A ஆனது "**இரண்டின் மூன்றின்**" தாயம் எனப்படும்.

இது

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ எனச் சில சந்தர்ப்பங்களில் எழுதப்படும்.

உதாரணம் 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தாயத்திலும்

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

தாயத்தின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை $= 3$
நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 2$
தாயத்தின் வரிசை $= 3 \times 2$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

நிரைகளின் எண்ணிக்கை $= 1$
நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 3$
தாயத்தின் வரிசை $= 1 \times 3$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

நிரைகளின் எண்ணிக்கை $= 2$
நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 1$
தாயத்தின் வரிசை $= 2 \times 1$

(iv) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

நிரைகளின் எண்ணிக்கை $= 2$
நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 2$
தாயத்தின் வரிசை $= 2 \times 2$

நிரைத் தாயம், நிரல் தாயம், சதுரத் தாயம்

ஒரு நிரை மாத்திரம் உள்ள தாயம் **நிரைத் தாயம்** எனவும் ஒரு நிரல் மாத்திரம் உள்ள தாயம் **நிரல்தாயம்** எனவும் நிரைகளினதும் நிரல்களினதும் எண்ணிக்கை சமனான தாயம் **சதுரத் தாயம்** எனவும் அழைக்கப்படும்.

உதாரணமாக

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ என்பது நிரைத் தாயமாகும்.

$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ என்பது நிரல் தாயமாகும்.

$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ என்பது சதுரத் தாயம்.

அலகுத் தாயமும் சமச்சீர்த் தாயமும்

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

மேலேயுள்ள சதுரத் தாயத்தில் கட்டமிடப்பட்டுக் காட்டப்பட்டிருப்பது பிரதான மூலைவிட்டமாகும். இடது பக்க மேல் மூலையிலிருந்து வலது பக்க கீழ் மூலை வரையுள்ள மூலகத் தொகுதி பிரதான மூலைவிட்டம் எனப்படும்.

குறிப்பு: பிரதானமூலைவிட்டமானதுசதுரத்தாயத்திற்குமாத்திரம்எடுத்துரைக்கப்படும். பிரதான மூலைவிட்டமானது பெரும்பாலும் எளிதாக மூலைவிட்டம் என்ற பெயரிலும் அழைக்கப்படும்.

கீழே வரிசை இரண்டாகவுள்ள ஒரு சதுரத் தாயத்தின் பிரதான மூலைவிட்டம் கட்டமிடப்பட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயம் விசேட வடிவிலான சதுரத் தாயமாகும்.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

தாயம் A இன் பிரதான மூலைவிட்டத்தில் அமைந்துள்ள எல்லா மூலகங்களினதும் பெறுமானம் 1 ஆகும். மூலைவிட்டத்திலுள்ள மூலகங்கள் தவிர எஞ்சிய சகல மூலகங்களும் 0 ஆகும். அவ்வாறான தாயம் **அலகுத் தாயம்** எனப்படும். A என்பது வரிசை 3×3 ஆகவுள்ள அலகுத் தாயமாகும். கீழே வரிசை 2×2 உடைய ஓர் அலகுத் தாயம் தரப்பட்டுள்ளது.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

அலகுத் தாயங்களைப் பெயரிடுவதற்கு எழுத்து I பயன்படுத்தப்படும். n நிரைகளையும் n நிரல்களையும் உடைய அலகுத் தாயம் $I_{n \times n}$ இன் மூலம் எழுதப்படும். இதற்கேற்ப

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ என எழுதப்படும்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயத்தில் உள்ள சிறப்பை உங்களால் அவதானிக்க முடிகின்றதா?

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

தாயம் X இல் தாய மூலைவிட்டத்தைச் சுற்றியுள்ள மூலகங்களை அவதானிக்க. தாய மூலைவிட்டத்தைச் சுற்றியுள்ள சமனான பெறுமானங்களைக் கொண்ட மூலகங்கள் சமச்சீராக அமைந்துள்ளன. இவ்வாறான தாய மூலைவிட்டத்தைச் சுற்றி சமனான மூலகங்களைச் சமச்சீராகக் கொண்டுள்ள தாயங்கள் **சமச்சீர்த் தாயங்கள்** என அழைக்கப்படும்.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y, Z ஆகிய தாயங்களில் பிரதான மூலைவிட்டத்தைச் சுற்றி சமனான மூலகங்கள் சமச்சீராக அமைந்துள்ளன. எனவே Y, Z ஆகியன சமச்சீர் தாயங்களாகும்.

குறிப்பு: சமச்சீர் தாயமும் சதுரத் தாயத்தில் மாத்திரம் எடுத்துரைக்கப்படும்.

பயிற்சி 19.1

1. ஒரு பழக்கடையில் அஸ்கா 2 தோடம்பழங்களையும் 3 மாம்பழங்களையும் கமலன் 4 தோடம்பழங்களையும் 1 மாம்பழத்தையும் ராஜன் 1 தோடம்பழத்தையும் 5 மாம்பழங்களையும் வாங்கினர்.

(i) அஸ்கா வாங்கிய பழங்களை ஒரு நிரைத் தாயத்தில் குறிக்க.

(ii) கமலன் வாங்கிய பழங்களை ஒரு நிரைத் தாயத்தில் குறிக்க.

(iii) ராஜன் வாங்கிய பழங்களை ஒரு நிரைத் தாயத்தில் குறிக்க.

(iv) அஸ்கா, கமலன், ராஜன் ஆகியோர் வாங்கிய பழங்களின் எண்ணிக்கைகள் நிரையாக உள்ள ஒரு தாயத்தை உருவாக்குக.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தாயத்தினதும் வரிசையை எழுதுக.

(i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iv) $D = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$ (v) $E = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ (vi) $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களிலிருந்து நிரை, நிரல் தாயங்களைத் தெரிந்து எழுதுக.

(i) $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $R = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$

(iv) $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (v) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vi) $U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களிலிருந்து

(i) சதுரத் தாயம்

(ii) சமச்சீர்த் தாயம்

(iii) அலகுத் தாயம் என்பவற்றைத் தெரிந்து எழுதுக.

சதுரத் தாயங்களில் மூலைவிட்டங்களைக் கட்டமிடுக.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

19.2 தாயங்களைக் கூட்டலும் கழித்தலும்

எண்களைக் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகளை நாம் கற்றுள்ளோம். அவ்வாறான கணிதச் செய்கைகளைப் பயன்படுத்திப் பெரும்பாலான செயன்முறைப் பிரசினங்களை இலகுவில் தீர்துக்கொள்ளலாம் என்பதை நாம் அனுபவத்தில் கண்டுள்ளோம். தாயங்களுக்கும் இவ்வாறான கணிதச் செய்கைகளைப் பிரயோகிக்கலாம்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள A, B ஆகிய தாயங்களைக் கருதுக.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

இந்த இரண்டு தாயங்களும் ஒரே வரிசையையுடைய தாயங்களாகும். அவ்வரிசை 3×2 ஆகும். A, B ஆகிய தாயங்களின் கூட்டுத்தொகையாகக் கருதப்படுவது A, B ஆகியவற்றின் ஒத்த மூலகங்களைக் கூட்டுவதால் பெறப்படும் தாயமாகும்.

இதற்கேற்ப

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 9 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$

எனப் பெறப்படும். இங்கு ஒத்த மூலகங்கள் எனப்படுவது ஒரே இடத்தில் அமைந்துள்ள மூலகங்களாகும். உதாரணமாக தாயம் A இல் முதலாம் நிரைக்கும் இரண்டாம் நிரலுக்குமுரிய மூலகம் 1 ஆகும். தாயம் B இல் அதற்கு ஒத்த மூலகம் 6 ஆகும். அதாவது தாயம் B இல் முதலாம் நிரைக்கும் இரண்டாம் நிரலுக்கும் உரிய மூலகமாகும். இனி அட்சரகணிதக் குறியீடுகளையுடைய ஓர் உதாரணத்தைக் கவனிப்போம்.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \text{ ஆயின் } X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{pmatrix}$$

தாயங்களைக் கூட்டலானது ஒரே வரிசையைக் கொண்ட தாயங்களின் கூட்டல் ஆகும். இதற்கேற்ப வரிசை வேறாகவுடைய தாயங்களுக்குத் தாயக் கூட்டல் பொருத்தமற்றதாகும்.

தாயக் கூட்டலைப் பயன்படுத்தக் கூடிய முறையை ஓர் உதாரணத்திலிருந்து இப்போது பார்ப்போம். இவ்வுதாரணம் மிக இலகுவாயினும் செயன்முறைப் பிரயோகங்களில் தாயத்தைப் பயன்படுத்தும் முறை இதன் மூலம் நன்கு தெளிவாகின்றது.

உதாரணம் 1

ரபீக், வினோத் ஆகியோர் ஒரு பாடசாலைக் கிரிக்கெற் குழுவிலுள்ள இரண்டு பந்து வீச்சாளர்கள் ஆவர். 2014, 2015 ஆகிய ஆண்டுகளில் நடைபெற்ற ஒருநாள், இரண்டு நாள் பாடசாலைகளுக்கிடையிலான போட்டிகளில் அவர்கள் இருவரும் பெற்ற விக்கெற்றுகளின் எண்ணிக்கைகள் பற்றிய விபரங்கள் கீழேயுள்ள இரண்டு அட்டவணைகளில் தரப்பட்டுள்ளன.

	2014	2015
ரபீக்	21	23
வினோத்	15	16

ஒரு நாள் போட்டிகளில்
பெற்ற விக்கெற்றுகள்

	2014	2015
ரபீக்	14	16
வினோத்	9	19

இரண்டு நாள் போட்டிகளில்
பெற்ற விக்கெற்றுகள்

ஒரு நாள் போட்டிகளுக்கான விபரங்களைத் தரும் தாயத்தை A எனவும் இரண்டு நாள் விபரங்களைத் தரும் தாயத்தை B எனவும் பெயரிடுவோம். அப்போது

$A = \begin{pmatrix} 21 & 23 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 19 \end{pmatrix}$ என எழுதலாம். இத்தாயங்களின் நிரல்கள் மூலம் ஆண்டுகளும் நிரைகள் மூலம் பந்துவீச்சாளர்களும் காட்டப்படுகின்றனர். $A + B$ என்னும் தாயத்தைக் காண்போம்.

$$A + B = \begin{pmatrix} 35 & 39 \\ 24 & 35 \end{pmatrix}$$

இத்தாயம் $A + B$ இனால் தரப்படுவது யாது என எண்ணிப் பார்க்க. இதன் மூலம் ரபீக், வினோத் ஆகியோர் 2014, 2015 ஆண்டுகளில் ஒரு நாள், இரண்டு நாள் போட்டிகளில் பெற்ற மொத்த விக்கெற்றுகள் தொடர்பான தகவல் காட்டப்படுகின்றது. இதனை ஓர் அட்டவணை வடிவில் இவ்வாறு காட்டலாம்.

	2014	2015
ரபீக்	35	39
வினோத்	24	35

ஒரு தாயத்திலிருந்து இன்னொரு தாயத்தைக் கழிப்பதையும் கூட்டலைப் போலவே செய்யலாம். இங்கு ஒத்த மூலகங்களைக் கழிப்பது இடம்பெறுகின்றது. இதற்கும் இரண்டு தாயங்களும் ஒரே வரிசையுடையதாயிருத்தல் வேண்டும். ஓர் உதாரணமாக

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ எனின் } A - B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

இன்னோர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

X என்பது வரிசை 3×3 ஆகவும் எல்லா மூலகங்களும் 2 ஆகவுமுள்ள ஒரு தாயமும் Y என்பது வரிசை 3×3 ஆகவுள்ள அலகுத்தாயமும் ஆயின் தாயம் $X - Y$ ஐக் காண்க.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே,

$$X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

இரண்டு தாயங்களின் சமதன்மை

இரண்டு தாயங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமனானவை என்பதை ஆராய்வோம்.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A, B ஆகிய தாயங்கள் சமனாவதற்கு $a = 2, b = 3, c = 10, d = 9$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். அதாவது ஒரு தாயத்தின் ஒவ்வொரு மூலகமும் மற்றைய தாயத்தின் ஒத்த மூலகங்களுக்கு சமனாக வேண்டும். அவ்வாறான சந்தர்ப்பங்களில் இரண்டு தாயங்களும் சமமானவை எனப்படும்.

பயிற்சி 19.4

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களைச் சுருக்குக.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(viii) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களைச் சுருக்குக.

(i) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ ஆயின் a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ஆயின் a , b , c, d ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

5. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ஆயின் x, y, z ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

6. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 3 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ஆயின் x, y ஆகியவற்றைக் காண்க.

19.3 ஒரு தாயத்தை ஓர் எண்ணால் பெருக்கல்

இனி நாம் ஒரு தாயத்தை ஓர் எண்ணால் பெருக்குதல் பற்றிப் பார்ப்போம். ஒரு தாயத்தை ஓர் எண்ணால் பெருக்கல் என்பதால் கருதப்படுவது தாயத்தின் எல்லா மூலகங்களும் அவ்வெண்ணால் பெருக்கப்படுவதாகும். தாயம் A ஐ k என்னும் எண்ணால் பெருக்கும்போது பெறப்படும் தாயம் kA என எழுதப்படும். இங்கு தாயமொன்றை நிறைவெண்ணால் பெருக்குதல் பற்றி கவனிப்போம். உதாரணமாக

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

தாயத்தை 5 ஆல் பெருக்கும்போது பெறப்படுவது

$$5A = \begin{pmatrix} 5 \times 3 & 5 \times 1 & 5 \times 0 \\ 5 \times (-2) & 5 \times 8 & 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 0 \\ -10 & 40 & 5 \end{pmatrix}$$ என்னும் தாயமாகும்.

குறிப்பு: தாயம் A, k என்னும் நிறைவெண்ணால் பெருக்கும்போது பெறப்படும் தாயத்தின் வரிசையும் A இன் வரிசையே ஆகும்.

உதாரணமாக $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ஆயின் $3X - 2Y$ ஐக் காண்க.

$$3X - 2Y = 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + -2\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

பயிற்சி 19.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களைச் சுருக்குக

(i) $3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(iv) $2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (v) $3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (vi) $-2\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $3\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ஆயின் a, b, c, d ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. $4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$ ஆயின் x, y, z ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

4. $2\begin{pmatrix} 5 & x \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} y & -5 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ ஆயின் x, y, a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

19.4 தாயங்களின் பெருக்கம்

மேலே கூறப்பட்ட தாயங்களின் கூட்டல், கழித்தல், ஒரு தாயத்தை எண்ணொன்றால் பெருக்கல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகள் எண்களுக்கான கணிதச்செய்கையின் முறையிலேயே செய்யப்பட்டன என்பதை நீங்கள் விளங்கிக் கொண்டிருப்பீர்கள். ஆயினும் தாயங்களைப் பெருக்குதல் ஓரளவு வித்தியாசமான முறையில் எடுத்துரைக்கப்படுகின்றது. தாயங்களைப் பெருக்கலை பின்வருமாறு விபரிக்கலாம்.

முதலில் நிரைத்தாயமொன்றை நிரல்தாயமொன்றினால் பெருக்கும் முறையைக் கவனிப்போம். A என்பது வரிசை $1 \times \mathrm{m}$ ஆகவுள்ள ஒரு நிரைத்தாயமாகும். B என்பது $\mathrm{m} \times 1$ ஆகவுள்ள ஒரு நிரல் தாயமும் ஆகும்போது AB யினால் தாயங்களின் பெருக்கம் தரப்படும். இதன் வரிசை 1×1 ஆகும். இப்பெருக்கலை எடுத்துரைக்கப்படும் முறையை விபரிப்பதற்காக உதாரணமாக,

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ எனவும் $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ எனவும் கொள்வோம். A என்பது வரிசை 1×2 உடைய தாயமாகும். B என்பது வரிசை 2×1 உடைய தாயமும் ஆகும். அப்போது

$$AB = (a_1b_1 + a_2b_2)_{1 \times 1}$$

எனப் பெருக்கம் AB கருத்துரைக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ஆயின் AB ஐக் காண்க.

$$AB = (5 \times 3 + 2 \times 1) = (17)$$

எந்த ஒரு தாயத்தையும் ஓர் எண்ணால் பெருக்க முடியும் என்பதை நாம் மேலே கற்றோம். ஆனால் கூட்டலையும் கழித்தலையும் வரிசைகள் சமனாக உள்ளபோது மாத்திரம் செய்யமுடியும் எனவும் நாம் கற்றோம். தாயப்பெருக்கலையும் சில சந்தர்ப்பங்களில் மாத்திரம் செய்யலாம். மேலே நாம் ஒரு நிரைத் தாயத்தை ஒரு நிரல் தாயத்தினால் பெருக்கும் முறையைக் கண்டோம். ஆயினும் அதிலும் வேறுபட்ட வரிசைகளையுடைய தாயங்களையும் பெருக்கலாம். மிகப் பொதுவானதாக A என்பது $m \times n$ ஆகவுள்ள தாயமும் B என்பது வரிசை $n \times p$ ஐ உடைய தாயமுமாயின் A இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் B இன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமனாகுமாயின் பெருக்கம் AB ஐக் காணலாம். அது எவ்வாறு என்பதை இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணமாக $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

ஆயின் பெருக்கம் AB ஐக் காணும் முறையை ஆராய்ந்து பார்ப்போம்.

மேலே நிரைத்தாயத்தையும் நிரல் தாயத்தையும் பெருக்கிய முறையில் A யின் ஒவ்வொரு நிரையையும் B யின் ஒவ்வொரு நிரலினால் பெருக்குக.

$$= \begin{pmatrix} (2 \ \ 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} & (2 \ \ 4)\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \\ (3 \ \ 5)\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} & (3 \ \ 5)\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 4 \times 6 & 2 \times 8 + 4 \times 7 \\ 3 \times 1 + 5 \times 6 & 3 \times 8 + 5 \times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 44 \\ 33 & 59 \end{pmatrix}$$ (ஒவ்வொரு பெருக்கத்தையும் காண்பதால்)

மேலே பெருக்கத்தாயம் AB யின் மூலகங்கள் எடுத்துரைக்கப்பட்ட முறையை இவ்வாறு விபரிக்கலாம்.

- AB யின் முதலாம் நிரைக்கும் முதலாம் நிரலுக்கும் உரித்தாகும் மூலகத்தைப் பெறுவது A இன் முதலாம் நிரையை (நிரைத்தாயம்) B யின் முதலாவது நிரலால் (நிரல் தாயத்தால்) பெருக்குவதன் மூலமாகும்.

- AB யின் முதலாவது நிரைக்கும் இரண்டாவது நிரலுக்கும் உரிய மூலகத்தைப் பெறுவது A யின் முதலாவது நிரையை (நிரைத்தாயம்) B யின் இரண்டாம் நிரலினால் (நிரல்தாயத்தினால்) பெருக்குவதால் ஆகும்.

- AB இன் இரண்டாம் நிரைக்கும் முதலாம் நிரலுக்கும் உரிய மூலகத்தைப் பெறுவது A இன் இரண்டாம் நிரையை (நிரைத்தாயம்) B யின் முதலாம் நிரலினால் (நிரல் தாயத்தினால்) பெருக்குவதால் ஆகும்.

- AB யின் இரண்டாம் நிரைக்கும் இரண்டாம் நிரலுக்கும் உரிய மூலகத்தைப் பெறுவது A இரண்டாவது நிரையை B யின் இரண்டாவது நிரலினால் பெருக்குவதால் ஆகும்.

இம்முறையில் எந்தவொரு பெருக்கக்கூடிய இரண்டு தாயங்களையும் பெருக்கலாம். மேலும் சில உதாரணங்களை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2

$X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ஆயின் XY வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படுகின்றது. எனக் காட்டி XY யைக் காண்க. தாயம் YX கருத்துடையதாகுமா?

X இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 2$ உம் Y யின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 2$ உம் ஆகும்.

அதாவது X இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை Y யின் நிரைகளுக்கு எண்ணிக்கைக்குச் சமனாகும். எனவே பெருக்கம் XY இனால் எடுத்துரைக்கப்படும்.

இனி

$$XY = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

X இன் ஒவ்வொரு நிரலையும் Y யின் ஒவ்வொரு நிரலினால் பெருக்குவதால்

$$= \begin{pmatrix} 4 \quad 6 & \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ 2 \quad 3 & \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 + 6 \times 7 \\ 2 \times 1 + 3 \times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 46 \\ 23 \end{pmatrix}$$

இனி பெருக்கம் YX ஆனது கருத்துரைக்கப்படுகின்றதா என ஆராய்வோம்.

Y யில் நிரல்கள் 1 உம் X இல் நிரைகள் 2 உம் உள்ளன. அதாவது Y யின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை X இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமன் அல்ல. எனவே YX என்னும் பெருக்கம் கருத்தற்றது.

$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம். தாயப் பெருக்கத்தின் கீழ் முதலில் நாம் QP வடிவிலான முறையில் பெருக்கத்தை கருத்துரைத்தோம். அதனை மேற்குறித்த கருத்துரைப்பின் படியும் காணலாம்.

அதாவது Q வின் எல்லா நிரைகளையும் P யின் எல்லா நிரல்களினாலும் பெருக்கு வதால் மூலகங்களைக் காண்பதன் மூலமாகும்.

$$QP = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

அதாவது தனி மூலகமொன்றுடனான தாயமாகும். தனி மூலகமொன்றுடனான தாயம் ஓர் எண் எனப்படும். எனவே $QP = 9$ என எழுதப்படும்.

மேலும் இங்கு PQ உம் வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படுகின்றது. PQ இன் மூலம் பெறப்படவேண்டிய வரிசை 2×2 ஐ உடைய ஒரு தாயமாகும்.

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 & 2 \times 3 \\ (-1) \times 6 & (-1) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

பயிற்சி 19.4

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களைச் சுருக்குக.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (viii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(ix) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (x) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ ஆயின் a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. A , B, C ஆகிய மூன்று தாயங்களும் $A \times B = C$ ஆகுமாறு உள்ளது. கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

தாயம் A இன் வரிசை	தாயம் B இன் வரிசை	தாயம் C இன் வரிசை
1×2	2×1	....
2×2	.... $\times 1$	....
....$\times 2$	.... $\times 1$	1×1
... $\times$	$1 \times$	2×2
....$\times 1$	.... $\times 2$	$1 \times$ .....

4. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ஆயின்,

(i) $P \times Q$
(ii) $P \times R$
(iii) $Q \times R$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ஆயின்

(i) AB ஐக் காண்க.
(ii) BA ஐக் காண்க.
(iii) AB, BA ஆகியவற்றுக்கிடையிலான தொடர்பு யாது?

20 சமனிலிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- $ax + b \gtreqless cx + d$ என்னும் வடிவிலான சமனிலிகளைத் தீர்க்கவும் தீர்வுகளை எண்கோட்டின் மீது குறிக்கவும்
- அன்றாட வாழ்வுடன் தொடர்புடைய பிரசினங்களை சமனிலிகள் மூலம் காட்டவும் அப்பிரசினங்களைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

தரம் 10 இல் கற்ற $ax + b \gtreqless c$ என்னும் வடிவிலான சமனிலிகளைத் தீர்க்கும் முறையை நினைவுகூர்வதற்குக் கீழே உள்ள மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக .

மீட்டற் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்க்க.

a. $3x - 2 > 4$ **b.** $\frac{x}{2} + 5 \leq 7$ **c.** $5 - 2x > 11$

d. $\frac{x}{-2} + 3 \leq 5$ **e.** $\frac{5x}{6} + 4 \geq 14$ **f.** $3 - 2x \geq 9$

20.1 $ax + b \gtreqless cx + d$ என்னும் வடிவிலான சமனிலிகளைத் தீர்த்தல்

$ax + b \gtreqless cx + d$ என்னும் வடிவிலான சமனிலிகளை அட்சரகணிதரீதியில் தீர்க்கும் முறையையும் அத்தீர்வுகளைக் கேத்திரகணிதரீதியில் வகைகுறிக்கும் முறையையும் உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

$3x - 2 > 2x + 1$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

இங்கு $3x - 2 > 2x + 1$ என்னும் சமனிலியில் x இலான உறுப்புகளை ஒரு பக்கத்திற்கும் எண்களை மற்றைய பக்கத்திற்கும் (சமன்பாடு தீர்ப்பது போன்றே) கொண்டு செல்ல வேண்டும்.

$3x - 2 > 2x + 1$

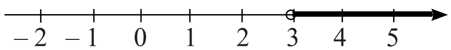
$3x - 2 + 2 > 2x + 1 + 2$ (இரு பக்கமும் 2 ஐக் கூட்டுவதால்)

$3x > 2x + 3$

$3x - 2x > 2x + 3 - 2x$ (இரு பக்கத்திலிருந்தும் $2x$ ஐக் கழிப்பதால்)

$x > 3$

இது சமனிலியின் தீர்வாகும். சொற்களில் விபரிப்பதாயின், தீர்வுகள் 3 இலும் கூடிய எல்லா மெய்யெண்களும் ஆகும். இத்தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின் மீது பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.



இங்கு 3 உரித்தாகாது என்பதைக் காட்டுவதற்காக 3 ஐக் காட்டும் புள்ளியைச் சுற்றி நிழற்றப்படாத ஒரு வட்டம் வரையப்படும்.

உதாரணம் 2

$5x + 3 \leq 3x + 1$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து x எடுக்கத்தக்க நிறைவெண் தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

$5x + 3 \leq 3x + 1$

$5x + 3 - 3 \leq 3x + 1 - 3$ (இரு பக்கமும் 3 ஐக் கழிப்பதால்)

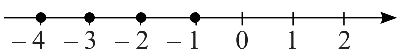
$5x \leq 3x - 2$

$5x - 3x \leq 3x - 2 - 3x$ (இரு பக்கமும் $3x$ ஐக் கழிப்பதால்)

$\frac{2x}{2} \leq \frac{-2}{2}$ (இரு பக்கமும் 2 ஆல் வகுப்பதால்)

$x \leq -1$

இதற்கேற்ப தீர்வுகளாவன -1 உம் அதற்குக் குறைந்த எல்லா நிறைவெண்களாகும். அதாவது $-1, -2, -3$ ஆகிய எண்களாகும். ஓர் எண் கோட்டின் மீது இத்தீர்வுகளை பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.



குறிப்பு: சிறப்பாக நிறைவெண் தீர்வுகள் பிரசினத்தில் வினவப்படாவிடின், தீர்வுகளாக மெய்யெண்களையே கருத வேண்டும்.

உதாரணம் 3

$2x - 5 \geq 4x - 4$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து x எடுக்கத்தக்க தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

$2x - 5 \geq 4x - 4$

$2x - 5 + 5 \geq 4x - 4 + 5$ (இரு பக்கமும் 5 ஐக் கூட்டுவதால்)

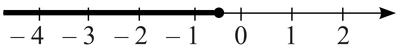
$2x \geq 4x + 1$

$2x - 4x \geq 4x + 1 - 4x$ (இரு பக்கமும் $4x$ ஐக் கழிப்பதால்)

$-2x \geq 1$

$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{1}{-2}$ (இரு பக்கமும் -2 ஆல் வகுப்பதால்)

$x \leq \frac{-1}{2}$



குறிப்பு: மறை எண்ணொன்றால் வகுக்கும்போது சமனிலிக் குறியீட்டை மாற்ற வேண்டும் என்பதை நினைவில் கொள்க. ஒரு மறை எண்ணால் வகுத்தல் வராதவாறு இப்பிரசினத்தைத் தீர்க்கும் முறையை ஆராய்ந்து பார்க்க.

பயிற்சி 20.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்க்க. நிறைவெண் தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

a. $3x - 4 > 2x$ **b.** $6x + 5 \geq 5x$

c. $2x - 9 \leq 5x$ **d.** $8 - 3x > x$

e. $5 - 2x \leq 3x$ **f.** $12 - x > 3x$

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்த்து x எடுக்கத்தக்க எல்லா தீர்வுகளையும் ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

a. $2x - 4 > x + 3$ **b.** $3x + 5 < x + 1$

c. $3x + 8 \geq 3 - 2x$ **d.** $5x + 7 \geq x - 5$

e. $3x - 8 \leq 5x + 2$ **f.** $2x + 3 \geq 5x - 6$

g. $x - 9 > 6x + 1$ **h.** $5x - 12 \leq 9x + 4$

i. $\frac{3x + 2}{2} > x + 3$ **j.** $2x - 5 \leq \frac{3x - 4}{-2}$

20. 2 சமனிலிகள் மூலம் பிரசினம் தீர்த்தல்

உதாரணம் 1

சமனான திணிவுடைய 8 தேயிலைப் பைக்கெற்றுகளும் 1kg சீனி பைக்கெற்றுகள் 3 உம் ஒரு பையினுள் இடப்பட்டுள்ளன. பை தாங்கக்கூடிய உச்ச திணிவு 5 kg ஆகும்.

(i) ஒரு தேயிலைப் பைக்கெற்றின் திணிவு x எனக் கொண்டு x இலான ஒரு சமனிலியை உருவாக்குக.

(ii) சமனிலியைத் தீர்த்து ஒரு தேயிலைப் பைக்கெற்றின் உச்ச திணிவைக் காண்க.

அனைத்தையும் கிராமிற்கு மாற்றிக் கொள்வது கணித்தலுக்கு இலகுவானது.

(i) ஒரு தேயிலைப் பைக்கெற்றின் திணிவு கிராமில் $= x$

$\therefore$ 8 தேயிலைப் பைக்கற்றுகளின் திணிவு கிராமில் $= 8x$

சீனியின் திணிவு கிராமில் $= 3 \times 1000$

$= 3000$

பை தாங்கக்கூடிய உச்ச திணிவு கிராமில் $= 5 \times 1000$

$= 5000$

தரப்பட்டுள்ள தரவுகளின் படி $8x + 3000 \leq 5000$

இதுவே தேவையான சமனிலியாகும்.

(ii) $8x + 3000 \leq 5000$

$8x + 3000 - 3000 \leq 5000 - 3000$

$$\frac{8x}{8} \leq \frac{2000}{8}$$

$x \leq 250$

$\therefore$ ஒரு தேயிலை பைக்கெற்றின் உச்ச திணிவு 250g B S®.

உதாரணம் 2

உதயன் 5 அப்பியாசப் புத்தகங்களையும் 3 பேனாக்களையும் கமலினி 3 அப்பியாசப் புத்தகங்களையும் 11 பேனாக்களையும் வாங்கினர். உதயன் செலவழித்த பணம் கமலினி செலவழித்த பணத்திலும் பார்க்கக் கூடியது அல்லது சமனானது ஆகும். அவர்கள் வாங்கிய ஒரு பேனாவின் விலை ரூ. 10 B S®.

(i) ஒரு அப்பியாசப் புத்தகத்தின் விலை ரூ. x எனக் கொண்டு x இலான ஒரு சமனிலியை உருவாக்குக.

(ii) சமனிலியைத் தீர்த்து ஓர் அப்பியாசப் புத்தகத்தின் அதிகுறைந்த விலையைக் காண்க.

(i) உதயன் வாங்கிய அப்பியாசப் புத்தகங்களின் விலை $=$ ரூ. $5x$
உதயன் செலவு செய்த தொகை $=$ ரூ. $5x + 30$
அவ்வாறே கமலினி செலவு செய்த தொகை $=$ ரூ. $3x + 110$

தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப,

$$5x + 30 \geq 3x + 110$$

இதுவே தேவையான சமனிலியாகும்.

(ii) $5x + 30 \geq 3x + 110$

$5x + 30 - 30 \geq 3x + 110 - 30$

$5x \geq 3x + 80$

$5x - 3x \geq 3x + 80 - 3x$

$\frac{2x}{2} \geq \frac{80}{2}$

$x \geq 40$

$\therefore$ ஓர் அப்பியாசப் புத்தகத்தின் இழிவு விலை ரூ. 40 ஆகும்.

பயிற்சி 20.2

1. ஒரு சிறிய உழவு இயந்திரத்தில் ஒன்று 50kg உடைய 5 சீமெந்து பைக்கெற்றுகளும் சமனான திணிவுடைய 30 கம்பிகளும் ஏற்றப்பட்டுள்ளன. உழவு இயந்திரத்தில் கொண்டு செல்லக்கூடிய உச்ச திணிவின் அளவு 700kg ஆகும்.

(i) ஒரு கம்பியின் திணிவு து டுஞ் எனக் கொண்டு மேலேயுள்ள தகவல்களிலிருந்து ஒரு சமனிலியை உருவாக்குக.

(ii) ஒரு கம்பியின் உச்ச திணிவைக் காண்க.

2. A என்னும் ஒரு பெட்டியில் 12 சிறிய விசுக்கோத்துப் பைக்கெற்றுகளும் 200g வீதமுள்ள 5 விசுக்கோத்துப் பைக்கற்றுகளும் B என்னும் இன்னொரு பெட்டியில் 4 சிறிய பைக்கற்றுகளும் 200g விசுக்கோத்துப் பைக்கெற்றுகள் 9 உம் அடுக்கப்பட்டுள்ளன. பெட்டி A இலுள்ள விசுக்கோத்துகளின் திணிவு பெட்டி B இலுள்ள விசுக்கோத்துகளின் திணிவிலும் குறைவானது அல்லது சமனானது ஆகும்.

(i) சிறிய விசுக்கோத்துப் பைக்கெற்று ஒன்றின் திணிவு x கிராம் எனக் கொண்டு தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து x இலான ஒரு சமனிலியை எழுதுக.

(ii) ஒரு சிறிய விசுக்கோத்துப் பைக்கெற்றின் உச்ச திணிவைக் காண்க.

3. ஒரு வேலைத்தளத்தில் பயிற்றப்பட்ட, பயிற்றப்படாத தொழிலாளர்கள் பணியாற்றுகின்றனர். ஒரு பயிற்றப்பட்ட தொழிலாளியின் ஒரு நாட் சம்பளம் ரூ. 1200 ஆகும். 5 பயிற்றப்பட்ட தொழிலாளர்களினதும் 7 பயிற்றப்படாத தொழிலாளர்களினதும் ஒரு நாட் சம்பளத்துக்குச் செலவாகும் தொகை 7 பயிற்றப்பட்ட தொழிலாளர்களினதும் 4 பயிற்றப்படாத தொழிலாளர்களினதும் சம்பளத்துக்குச் சமனாகும் அல்லது அதிகமாகும்.

(i) பயிற்றப்படாத ஒரு தொழிலாளியின் ஒரு நாட் சம்பளம் ரூ. x எனக் கொண்டு மேலேயுள்ள தகவல்களிலிருந்து x இலான ஒரு சமனிலியை உருவாக்குக.

(ii) சமனிலியைத் தீர்த்து பயிற்றப்படாத ஒரு தொழிலாளியின் ஒரு நாளின் இழிவுச் சம்பளத்தைக் காண்க.

4. நிறையில் சமனான 5 தேயிலை பைக்கெற்றுகளும் 3kg சீனியின் திணிவானது 25 தேயிலைப் பைக்கெற்றுகளின் திணிவுக்குச் சமனான திணிவையோ அதனிலும் கூடிய திணிவையே உடையது. இத்தகவல்களிலிருந்து ஒரு சமனிலியை உருவாக்கி ஒரு தேயிலைப் பைக்கெற்றின் உச்ச திணிவைக் காண்க.

5. இரண்டு அறைகளில் தரையோடுகள் பதிப்பதற்தாக இரண்டு அளவுகளிலான சதுர வடிவிலான தரையோடுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. பெரிய தரையோட்டின் பரப்பளவு 900 cm^2 ஆகும். அறை A இல் பதிப்பதற்காக சிறிய தரையோடுகள் 100 உம் பெரிய தரையோடுகள் 10 உம் அறை B இற்கு சிறிய தரையோடுகள் 20 உம் பெரிய தரையோடுகள் 30 உம் தேவைப்பட்டன. அறை B இன் நிலத்தின் பரப்பளவு A இன் நிலத்தின் பரப்பளவுக்குச் சமன் அல்லது கூடியது எனின் ஒரு சமனிலியிலிருந்து ஒரு சிறிய தரையோட்டின் ஒரு பக்கத்தின் உச்ச நீளத்தைக் காண்க.

6. ஒரு தாங்கியானது 5 l கொள்ளளவுடைய ஒரு பெரிய வாளியினாலும் மேலுமொரு சிறிய வாளியினாலும் நீரினால் நிரப்படுகின்றது. பெரிய வாளியினால் 12 தடவைகளும் சிறிய வாளியினால் 4 தடவைகளும் நீரை ஊற்றியபோது தாங்கி முற்றாக நிரம்பியது. பெரிய வாளியினால் 9 தடவைகளும் சிறிய வாளியினால் 9 தடவைகளும் நீரை ஊற்றியபோது தாங்கி நிரம்பவில்லை. ஒரு சமனிலியிலிருந்து சிறிய வாளியின் உச்சக் கொள்ளளவைக் காண்க.

21 வட்ட நாற்பக்கல்கள்

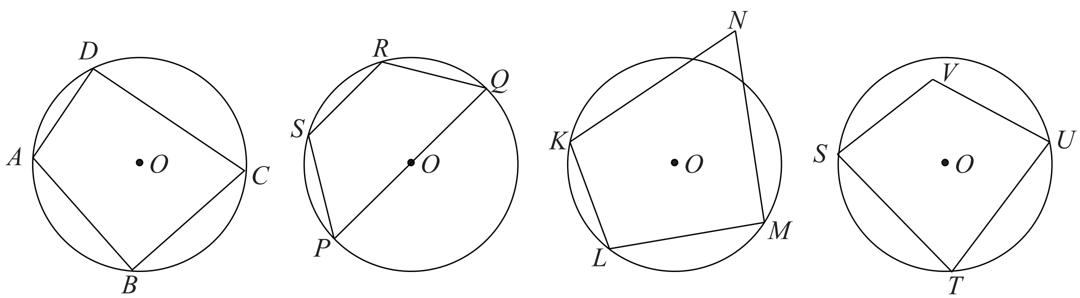
இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்

- வட்ட நாற்பக்கலை அறிந்து கொள்வதற்கும் ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகளாகும் என்னும் தேற்றத்தையும் அதன் மறுதலையையும் அறிந்துகொள்ளவும்
- ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் ஒரு புறக் கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணத்திற்கு சமனாகும் என்னும் தேற்றத்தையும் அதன் மறுதலையையும் அறிந்து கொள்ளவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

21.1 வட்ட நாற்பக்கல்

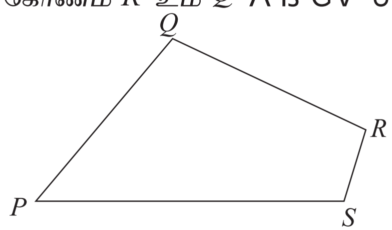
ஒரு நாற்பக்கலின் நான்கு உச்சிகளும் ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்திருப்பின் அந்நாற்பக்கல் ஒரு **வட்ட நாற்பக்கல்** எனப்படும்.



(i) (ii) (iii) (iii)

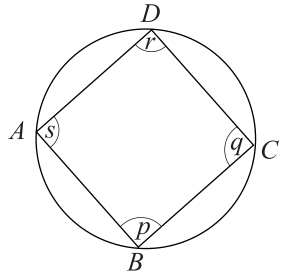
மேலேயுள்ள உருக்களில் தரப்பட்டுள்ளவாறு (i), (ii) ஆகிய உருக்களில் உள்ள $ABCD$, $PQRS$ ஆகியன **வட்ட நாற்பக்கல்கள்** என்பதும் (iii), (iv) ஆகிய உருக்களில் உள்ள நாற்பக்கல்கள் **வட்ட நாற்பக்கல்கள்** அல்ல என்பதும் தெளிவாகும்.

ஒரு வட்ட நாற்பக்கலில் யாதாயினுமொரு கோணத்தின் எதிர்க் கோணம் எனப்படுவது அதற்கு எதிரே உள்ள கோணமாகும். உதாரணமாக கீழே தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $\hat{P}$ யின் எதிர்க் கோணம் $\hat{R}$ உம் $\hat{Q}$ Â ß Gv ºU÷Põ n ® $\hat{S}$ E® B S®.



J ¸ Ámh |õØ£UP¼ß Gvº÷Põn [PÐUQøh° »õÚ öuõhºø£¨ ¤ßÁ ¸® ö\¯Ø£õmiÀ Dk£mk ÂÍ[QU öPõÒ÷Áõ®.

செயற்பாடு 1



- உருவிலுள்ளவாறு ஒரு வட்ட நாற்பக்கலை வரைந்து கொள்க.
- வட்ட நாற்பக்கலின் கோணங்களை வெட்டி வேறாக்கிக் கொள்க.
- வேறாக்கிய கோணங்களில் p, r என்பன மூலம் தரப்படும் கோணச் சோடியையும் q , s என்பன மூலம் தரப்படும் கோணச் சோடியையும் வெவ்வேறாக அடுத்துள்ள கோணங்கள் ஆகுமாறு ஒரு தாளில் ஒட்டிக் கொள்க. அவை மிகைநிரப்பிகளா? (அதாவது கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° BQßÓuõ) GÚ AÍ¢x £õºUP.
- இதன் மூலம் ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் தொடர்பாக நீர் எடுக்கக்கூடிய முடிபு யாது?

$p + r = 180^{\circ}$ உம் $q + s = 180^{\circ}$ உம் ஆகின்றதென்பது உங்களுக்கு விளங்கும். இத்தொடர்பைக் கீழே உள்ளவாறு ஒரு தேற்றமாக முன்வைக்கலாம்.

தேற்றம்:
ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகளாகும்.

மேற்குறித்த தேற்றத்தைத் தரப்பட்டுள்ள உருவிற்கேற்பப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.

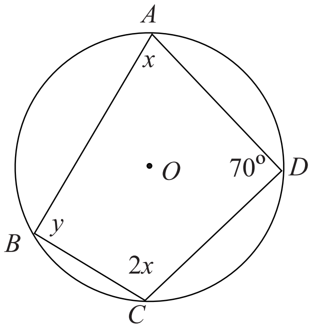
$$A\hat{B}C + C\hat{D}A = 180^{\circ}$$

$$D\hat{C}B + D\hat{A}B = 180^{\circ}$$

மேற்குறிப்பிட்ட தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கணித்தல்களைச் செய்யும் முறையை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள வட்ட நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகள் என்பதால்,

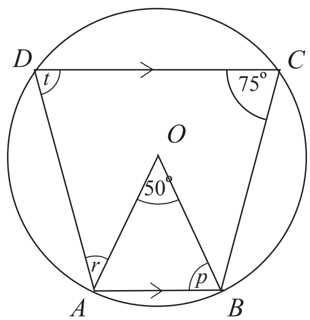
$$70^{\circ} + y = 180^{\circ}$$
$$\therefore\ y = 180^{\circ} - 70^{\circ}$$
$$y = 110^{\circ}$$

ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகள் என்பதால்,

$$x + 2x = 180^{\circ}$$
$$3x = 180^{\circ}$$
$$\therefore\ x = 60^{\circ}$$

உதாரணம் 2

உருவிலுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தில் $AB//CD$ ஆகும். குறியீடுகள் மூலம் தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் பருமனைக் காண்க.



$O\hat{A}B = O\hat{B}A$ ($OA=OB$ ஆகியன ஒரே வட்டத்தின் ஆரைகள் என்பதால் சமனானவை)

$\therefore\ p + p + 50^{\circ} = 180^{\circ}$ (• U÷Põ o OAB யின் அகக் கோணங்கள்)

$$p = \frac{180^{\circ} - 50^{\circ}}{2}$$
$$= 65^{\circ}$$

$D\hat{C}B + D\hat{A}B = 180^{\circ}$ (வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள்)

$$75^{\circ} + D\hat{A}B = 180^{\circ}$$
$$D\hat{A}B = 180^{\circ} - 75^{\circ}$$
$$= 105^{\circ}$$

$B\hat{A}O + O\hat{A}D = 105^\circ$

$\therefore \quad 65^\circ + r = 105^\circ$

$r = 105^\circ - 65^\circ$

$r = 40^\circ$

நேயக் கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்

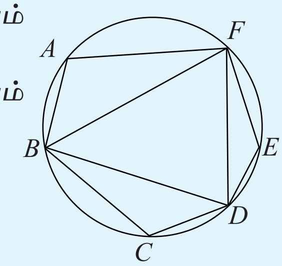
$t + 105^\circ = 180^\circ$

$\therefore \quad t = 180^\circ - 105^\circ$

$t = 75^\circ$

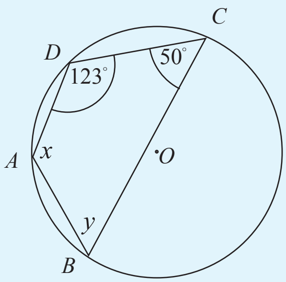
பயிற்சி 21.1

1. (i) உருவிலுள்ள எல்லா வட்ட நாற்பக்கல்களையும் எழுதுக.
   (ii) மேலே பெயரிட்ட ஒவ்வொரு வட்ட நாற்பக்கலினதும் இரண்டு எதிர்க்கோணச் சோடிகளை எழுதுக.

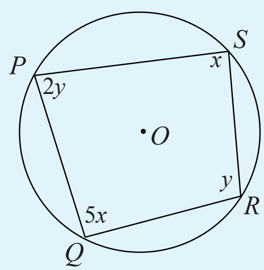


2. தரப்பட்டுள்ள தகவல்களைப் பயன்படுத்திக் குறியீடுகளால் தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோணத்தின் பருமனைக் காண்க. உருக்களில் மையம் O எனப் பெயரிடப்பட்டுள்ளது.

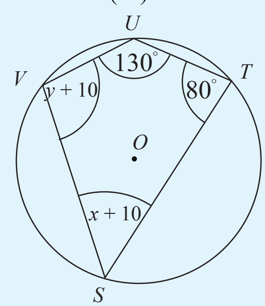
(i)



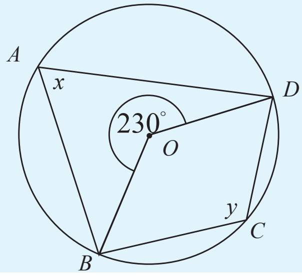
(ii)



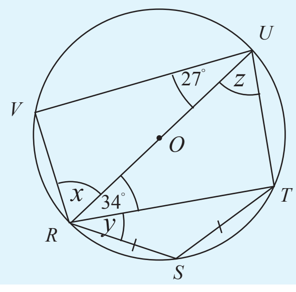
(iii)



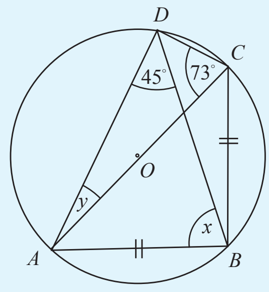
(iv)



(v)



(vi)



3. உருவில் O வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம் தரப்பட்டுள்ளது.

a. $\hat{P} = 60^{o}, \hat{S} = 125^{o}$, ஆயின் $\hat{R}, \hat{Q}$ இன் பெறுமானம்.

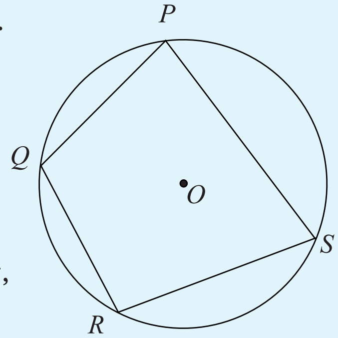
b. $\hat{P} : \hat{R} = 2 : 3$ ஆயின் $\hat{P}, \hat{R}$ இன் பெறுமானம்.

c. $\hat{Q} - \hat{S} = 120^{o}$ ஆயின் $\hat{S}, \hat{Q}$ இன் பெறுமானம்.

e. $2\hat{P} = \hat{R}$ ஆயின் $\hat{P}$ இன் பெறுமானம்.

f. $\hat{P} = 2x + y, \hat{Q} = x + y, \hat{R} = 60^{o}, \hat{S} = 90^{o}$ ஆயின் x, y இன் பெறுமானம்.

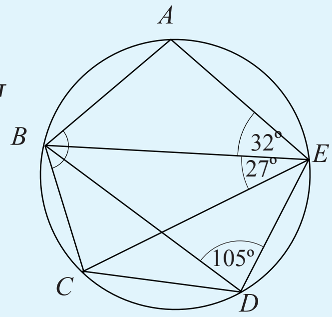
ஆகியவற்றைக் காண்க.



4. யாதாயினுமொரு வட்டத்தின் பரிதியின் மீது A, B, C, D, E, F ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.
$F\hat{A}B + B\hat{C}D + D\hat{E}F$ இன் பெறுமானம் காண்க.

5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்பக் கீழேயுள்ள ஒவ்வொரு கோணத்தின் பெறுமானத்தையும் காண்க.

a. $B\hat{A}E$ b. $C\hat{B}A$ c. $C\hat{B}E$

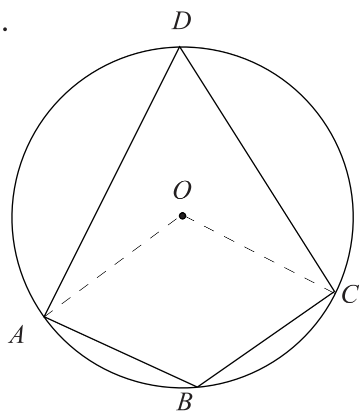


மேலே குறிப்பிட்ட ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க்கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகளாகும் என்னும் தேற்றத்தை நிறுவும் முறையை நாம் ஆராய்வோம்.

தரவு: $ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கலாகும். O மையமாகும்.

நி.வே: $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^{o}$
$D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180^{o}$

அமைப்பு: OA, OC ஆகியவற்றை இணைக்க.



நிறுவல்:

$\hat{AOC} = 2\hat{ADC}$ (மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் பரிதியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்.)

$\hat{AOC}$ (பின்வளை) $= 2\hat{ABC}$ (மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் பரிதியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்.)

$\therefore\ \hat{AOC} + \hat{AOC}$ (பின்வளை) $= 2\hat{ADC} + 2\hat{ABC}$

ஆனால் $\hat{AOC} + \hat{AOC}$ (பின்வளை) $= 360^{\circ}$ (ஒரு புள்ளிக் கோணம்)

$\therefore\ 2\hat{ADC} + 2\hat{ABC} = 360^{\circ}$

அப்போது $\hat{ADC} + \hat{ABC} = 180^{\circ}$

இவ்வாறு OB, OD ஆகியவற்றை இணைப்பதன் மூலம்

$\therefore\ \hat{DAB} + \hat{DCB} = 180^{\circ}$ எனக் காட்டலாம்.

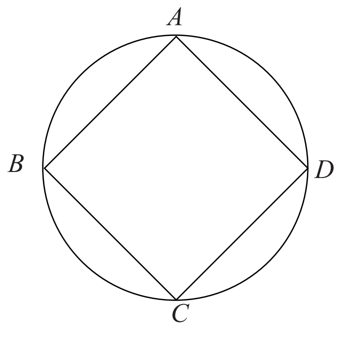
$\therefore$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகளாகும்.

இத்தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மையானதாகும். அதாவது ஒரு நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆயின் அந்நாற்பக்கலின் உச்சிகள் ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்திருக்கும். அதனை ஒரு தேற்றமாக கீழே உள்ளவாறு முன்வைக்கலாம்.

தேற்றம் : ஒரு நாற்பக்கலின் ஒரு சோடி எதிர்க் கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகளாயின் அந்நாற்பக்கல் ஒரு வட்ட நாற்பக்கலாகும்.

மேற்குறித்த தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஏறிகளை நிறுவும் விதத்தை இப்போது பார்போம்.

உதாரணம் 1



உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்ட நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் $AB = AD$ உம் $CB = CD$ உம் ஆகும்.

(i) $\Delta ABC \equiv \Delta ACD$ எனக் காட்டுக.

(ii) AC ஆனது ஒரு விட்டம் என்பதை உய்த்தறிக.

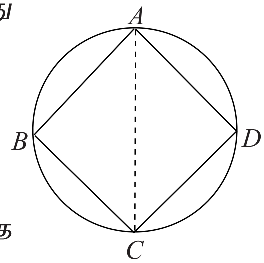
(i) ABC, ADC ஆகிய முக்கோணிச் சோடிகளைக் கருதும்போது

$AB = AD$ (தரவு)

$BC = DC$ (தரவு)

AC பொதுப் பக்கம்

$\therefore \ \Delta ABC \equiv \Delta ACD$ (ப.ப.ப.)



(ii) $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ (ஒருங்கிசைவான முக்கோணிகளில் ஒத்த உறுப்புகள் சமனானவை)

ஆனால் $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^{\circ}$ (ஒரு வட்ட நாற்பக்கலில் எதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகளாகும்)

$\therefore \ A\hat{B}C + A\hat{B}C = 180^{\circ}$ $(\because \ A\hat{B}C = A\hat{D}C)$

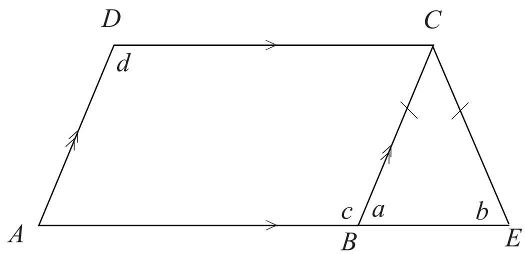
$2\,A\hat{B}C = 180^{\circ}$

$\therefore \ A\hat{B}C = 90^{\circ}$

$\therefore$ AC ஆனது விட்டம் ஆகும். (அரைவட்டக் கோணம் 90° என்பதால்)

உதாரணம் 2

இணைகரம் $ABCD$ இல் $CB = CE$ ஆகுமாறு பக்கம் AB ஆனது E வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. $AECD$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனக் காட்டுக.



$a = b$ ($CE = CB$ என்பதால்)

$c = 180^{\circ} - a$ (நேர்கோணம்)

$c = 180^{\circ} - b$ ($a = b$ என்பதால்) ——— ①

$c = d$ (இணைகரம் $ABCD$ ° ß Gv⁰U ÷Põ n [PÒ) ——— ②

①, ② C¼ ¸ ¢x

$d = 180^{\circ} - b$

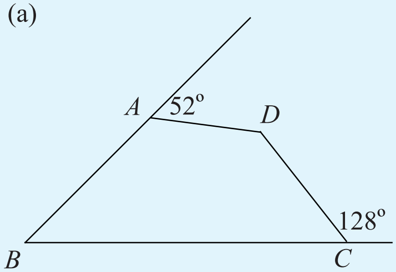
$\therefore b + d = 180^{\circ}$

நாற்பக்கல் $AECD$ இல் எதிர்க் கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால் அந்நாற்பக்கல் வட்ட நாற்பக்கலாகும்.

பயிற்சி 21.2

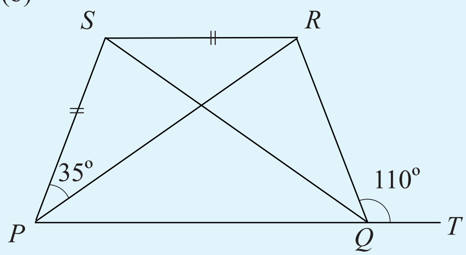
1. கீழே ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல் வட்ட நாற்பக்கல் ஆகுமா, இல்லையா? என்பதைக் காரணங்களுடன் விளக்குக.

(a)



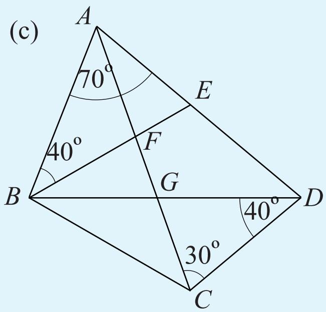
நாற்பக்கல் *ABCD*

(b)



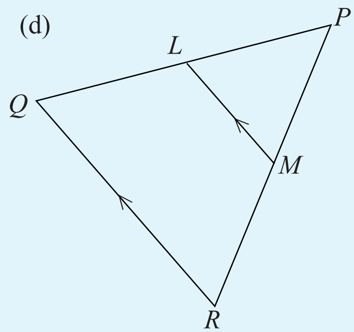
நாற்பக்கல் *PQRS*

(c)



நாற்பக்கல் *FGDE*

(d)



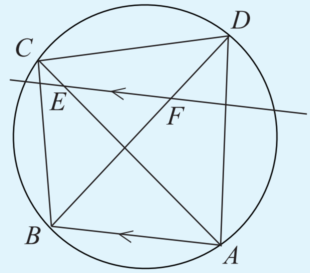
$PQ = PR$ B ° ß நாற்பக்கல் *QRML*

2. நாற்பக்கல் *PQRS* CÀ $\hat{P} = \hat{Q}$ E® $\hat{R} = \hat{S}$ E® B S®. *PQRS* J ¸ Ámh |õØ£UPÀ GÚU Põm k P.

3. வட்ட நாற்பக்கல் *ABCD* இல் *AC* இணைக்கப்பட்டுள்ளது. $B\hat{A}C = A\hat{D}C - A\hat{C}B$ எனக் காட்டுக.

4. நாற்பக்கல் $ABCD$ CÀ $A\hat{B}D + A\hat{D}B = D\hat{C}B$ ஆகுமாயின் A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தின் மீது அமையும் எனக் காட்டுக.

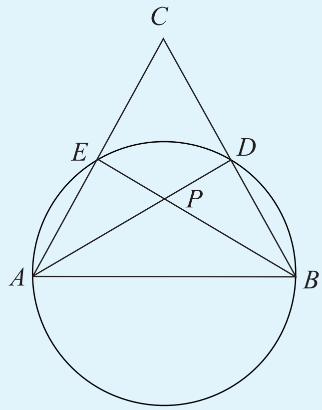
5. E ¸ ÂÀ uµ¨£mkÒÍ uPÁÀP Î ¼ ¸ ¢x $CDFE$ J ¸ Ámh |õØ£UPÀ GÚ {ÖÄP.



6. தரப்பட்டுள்ள உருவில் AB Âmh©õ ° ß

(i) $A\hat{P}B = C\hat{A}B + A\hat{B}C$ GÚÄ®

(ii) $CDPE$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனவும் நிறுவுக.

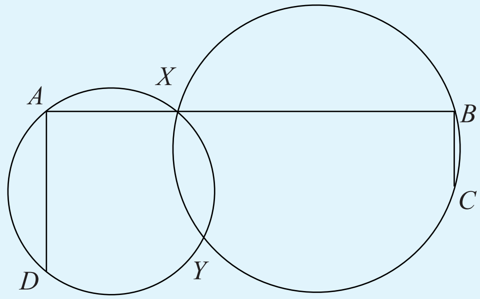


7. முக்கோணி PQR இல் பக்கம் PQ ஆனது S வரையும் பக்கம் PR ஆனது T வரையும் நீட்டப்பட்டுள்ளன. $S\hat{Q}R$, $Q\hat{R}T$ ஆகியவற்றின் இருசம கூறாக்கிகள் X இலும் $P\hat{Q}R$, $P\hat{R}Q$ ஆகியவற்றின் இருசமகூறாக்கிகள் Y இலும் ஒன்றையொன்று சந்திக்கின்றன.

(i) $QXRY$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனவும் XY ஆனது ஒரு விட்டம் எனவும் காட்டுக.

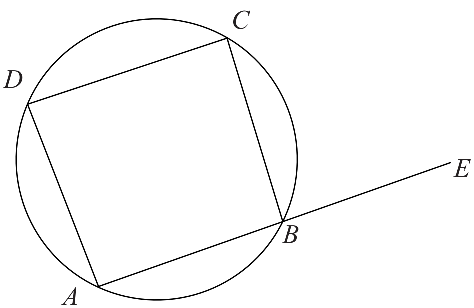
(ii) $Q\hat{P}R = 40^{\circ}$ ஆயின் $Q\hat{X}R$ இன் பெறுமானம் காண்க.

8. உருவிலுள்ள இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று X, Y என்பவற்றில் இடைவெட்டுகின்றன. X C Þ hõP Á øµ¯¨£mh ÷|º÷PõhõÚ x Cµs k Ámh [Pø Í ²® A, B BQ¯ÁØÔÀ \¢vUQßÓx. AD, BC ஆகியன சமாந்தரமாகுமாறு D, C ஆகிய புள்ளிகள் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன. DYC ஓர் நேர்கோடு எனக் காட்டுக.

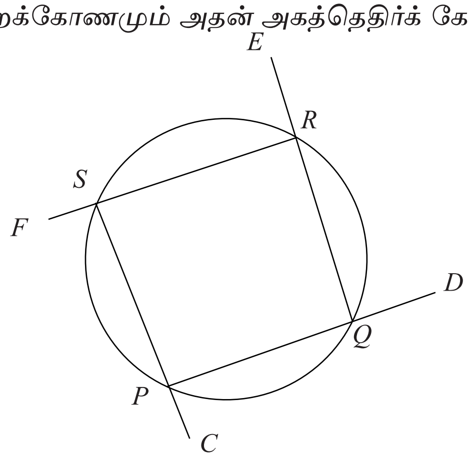


21.3 ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் புறக் கோணத்திற்கும் அகத்தெதிர்க் கோணத்திற்கும் இடையிலான தொடர்பு

தரப்பட்ட உருவில் உள்ள வட்ட நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் பக்கம் AB ஆனது E வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது.



இங்கு $C\hat{B}E$ ஆனது புறக்கோணமும் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணம் $A\hat{D}C$ உம் ஆகும்.

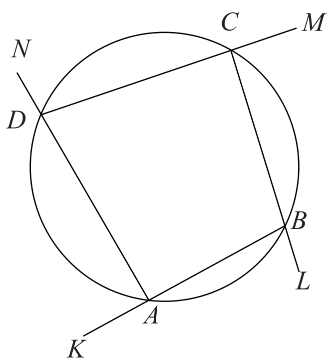


÷©÷» ²ÒÍ உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்ட நாற்பக்கல் $PQRS$ ஐக் கருதும்போது, கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையை பூரணப்படுத்தலாம்.

நீட்டப்பட்ட பக்கம்	புறக் கோணம்	அகத்தெதிர்க் கோணம்
PQ	$D\hat{Q}R$	$P\hat{S}R$
QR	$E\hat{R}S$	$Q\hat{P}S$
RS	$F\hat{S}P$	$P\hat{Q}R$
SP	$Q\hat{P}C$	$Q\hat{R}S$

ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் புறக்கோணம், அகத்தெதிர்க் கோணம் ஆகிய வற்றுக்கிடையிலுள்ள தொடர்பு கீழேயுள்ள தேற்றத்தில் முன்வைக்கப்படுகின்றது.

தேற்றம்
ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் ஒரு பக்கத்தை நீட்ட உண்டாகும் புறக் கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணத்திற்குச் சமனாகும்.



இத்தேற்றத்திற்கேற்ப மேலேயுள்ள உருவின்படி பின்வருமாறு கோணங்கள் சமப்படும்.

$D\hat{A}K = B\hat{C}D$

$A\hat{B}L = C\hat{D}A$

$B\hat{C}M = B\hat{A}D$

$C\hat{D}N = A\hat{B}C$ ஆகும்.

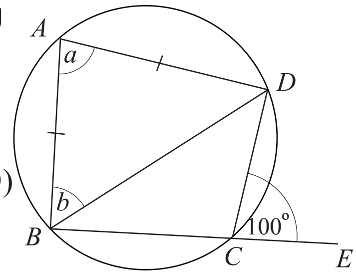
இத்தேற்றம் ஏன் உண்மையாகின்றது என்பதை ஆராய்வோம். உதாரணமாக மேலேயுள்ள உருவில்

$D\hat{A}B$, $B\hat{C}M$ BQ¯ ÷Põ n [PÒ \©ÚõÁuØPõÚ Põµ n zøu Bµõ´÷Áõ®. $ABCD$ J¸ Ámh |õØ£UPÀ Gß£uõÀ $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180^\circ$ B S®. AÆÁõ÷Ó DCM J¸ ÷|º÷Põk Gß£uõÀ

$B\hat{C}D + B\hat{C}M = 180^\circ$, $D\hat{A}B + B\hat{C}D = B\hat{C}D + B\hat{C}M$ B S®. C¸£UP • ® $B\hat{C}D$ IUPÈUS®÷£õx $D\hat{A}B = B\hat{C}M$ GÚ¨ ö£Ó¨£k®.

உதாரணம் 1

uµ¨£mkÒÍ E¸Â¾ÒÍ a, b BQ¯ÁØÔß ö£Ö©õÚ [Pø ÍUPõ sP.



J¸ Ámh |õØ£UP¼ß ¦ÓU ÷Põn® APzöuvºU ÷Põn zvØSa \©ß Gß£uõÀ

$a = 100^\circ$

$A\hat{D}B = b$ ($AB = AD$ Gß£uõÀ)

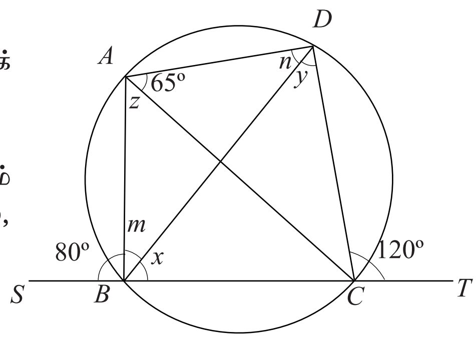
$a + b + b = 180^\circ$ (J¸ •U÷Põ o ° ß APU÷Põ n [PÒ)

$100^\circ + 2b = 180^\circ$

$b = 40^\circ$

உதாரணம் 2

தரப்பட்டுள்ள உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள x, y, z, n, m ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



$x = 65^\circ$ (ஒரே துண்டக் கோணம்)

ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் புறக் கோணம் அகத்தெதிர்க் கோணத்துக்குச் சமன் என்பதால்,

$B\hat{A}D = D\hat{C}T$

$B\hat{A}D = 120^\circ$

$z + 65^\circ = 120^\circ$

$z = 55^\circ$

$z = y$ (ஒரே துண்டக் கோணங்கள்)

$\therefore\ y = 55^\circ$

ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் புறக்கோணம் அகத்தெதிர்க் கோணத்துக்குச் சமன் என்பதால்,

$A\hat{D}C = A\hat{B}S = 80^\circ$

$\therefore\ n + y = 80^\circ$

$n + 55^\circ = 80^\circ$

$n = 80^\circ - 55^\circ$

$\therefore\ n = 25^\circ$

$80^\circ + m + x = 180^\circ$ (நேர் கோட்டில் அடுத்துள்ள கோணங்கள்)

$C\hat{A}D = x$ (ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்கள்)

$80^\circ + m + 65^\circ = 180^\circ$

$m = 180^\circ - 145^\circ$

$m = 35^\circ$

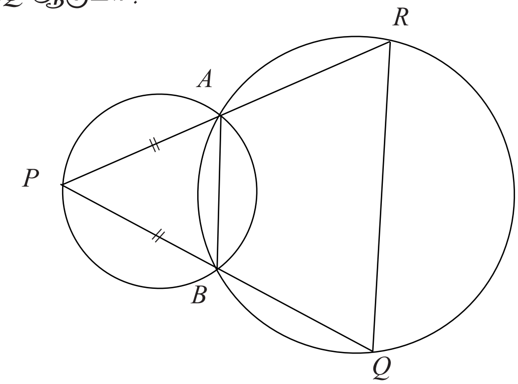
உதாரணம் 3

உருவில்தரப்பட்டுள்ளஇரண்டுவட்டங்களும் A, B ஆகியவற்றில்இடைவெட்டுவதுடன் $PA = PB$ ஆகும்.

$A\hat{P}B = 70^\circ$ ஆயின்

(i) $A\hat{R}Q$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) $AB // RQ$ ஆகுமா?



(i) முக்கோணி APB இல்

$P\hat{A}B = P\hat{B}A$ ($PA = PB$ என்பதால்)

$\therefore \; P\hat{A}B = P\hat{B}A = \dfrac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$

மேலும் $A\hat{B}P = A\hat{R}Q$ (வட்ட நாற்பக்கல் $ABQR$ இல் புறக் கோணம் = அகத்தெதிர்க் கோணம்)

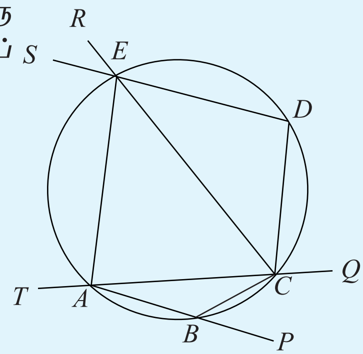
$\therefore \; A\hat{R}Q = 55^\circ$

(ii) $P\hat{A}B = A\hat{R}Q = 55^\circ$ ஆகும்.

$\therefore \; AB // RQ$ ஆகும். (ஒத்த கோணங்கள் சமன் என்பதால்)

பயிற்சி 21.3

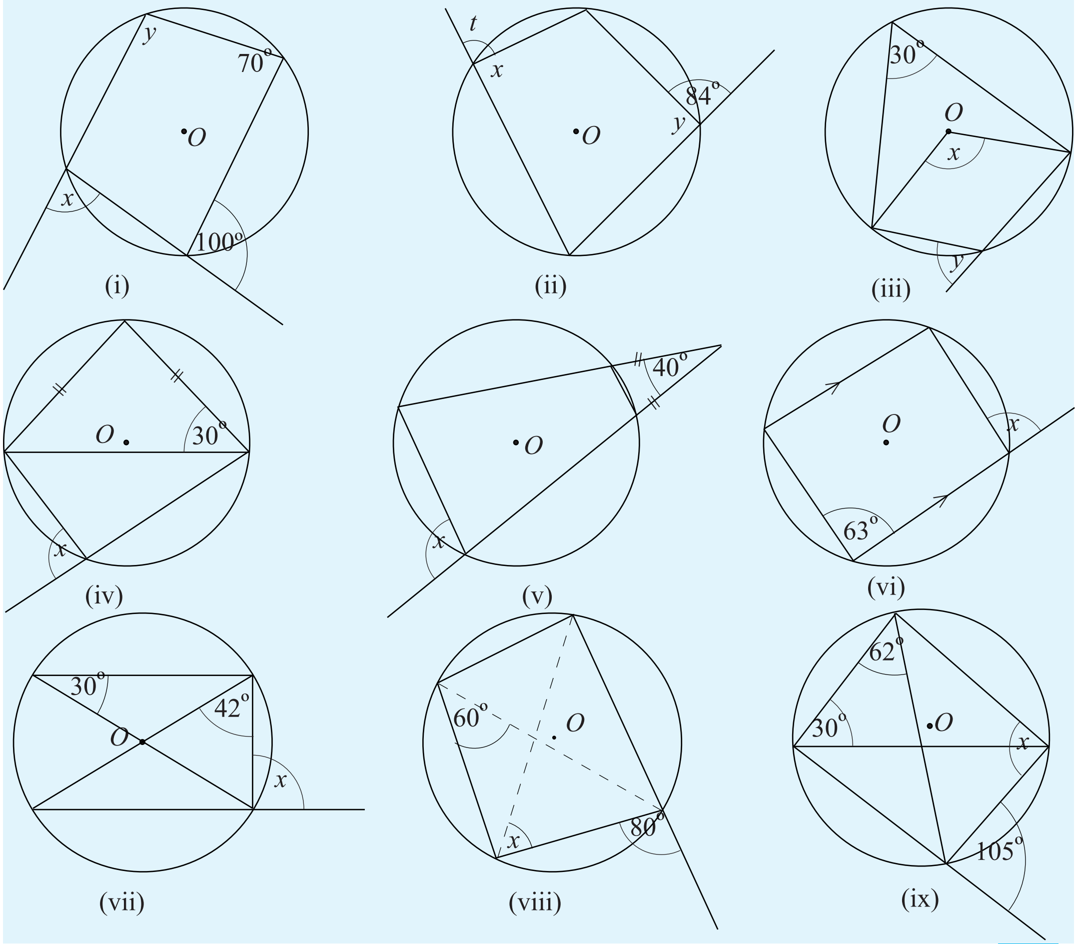
1. உருவிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோணத்துக்கும் சமனான ஒரு கோணத்தைப் பெயரிடுக.

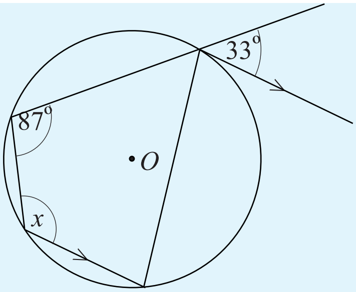


(i) $C\hat{B}P$ (ii) $D\hat{C}Q$ (iii) $R\hat{E}A$

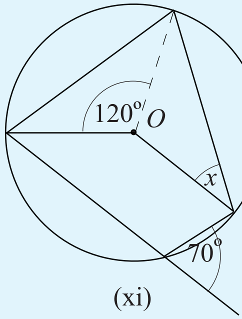
(iv) $S\hat{E}A$ (v) $E\hat{A}T$

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவங்களில் O GÚ¨ ö£¯›h¨£mhÒ Íx உரிய வட்டத்தின் மையம். அட்சரகணிதக் குறியீடுகளினால் தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் பருமனைக் காண்க.

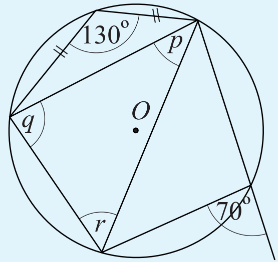




(x)



(xi)

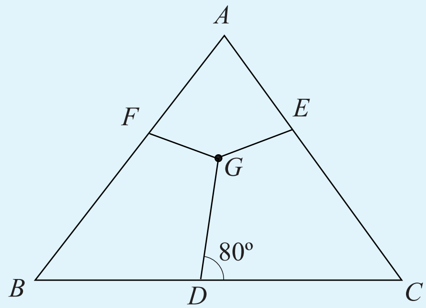


(xii)

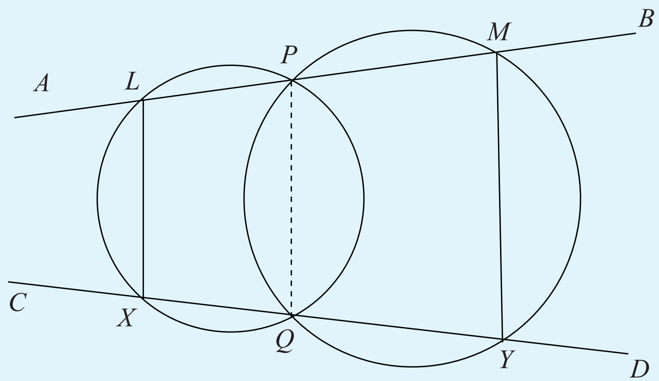
3. முக்கோணி ABC இல் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் மீது முறையே D, E, F ஆகிய புள்ளிகள் $BDGF$, $DCEG$ ஆகியன வட்ட நாற்பக்கல்கள் ஆகுமாறும் $G\hat{D}C = 80^\circ$ ஆகுமாறும் அமைந்துள்ளன ஆயின்,

(i) $A\hat{F}G$, $A\hat{E}G$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $AFGE$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனக் காட்டுக.



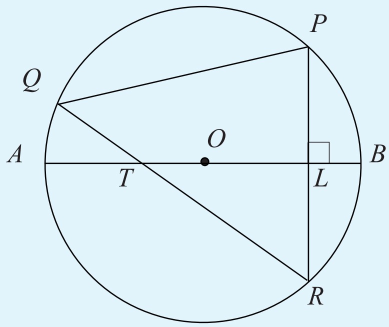
4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டங்கள் P, Q ஆகியவற்றில் இடைவெட்டுகின்றன. நேர்கோடு APB ஆனது L, M இலும் நேர்கோடு CQD ஆனது X, Y இலும் வட்டங்களை வெட்டிச் செல்கின்றன.



(i) $A\hat{L}X = 105^\circ$ ஆயின் $B\hat{M}Y$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) LX உம் MY உம் சமாந்தரமானவை எனக் காட்டுக.

5. உருவிலுள்ளவாறு வட்டத்தின் மையம் O ஆவதுடன் விட்டம் AB உம் நாண் PR உம் ஒன்றையொன்று L இல் செங்குத்தாக இடைவெட்டுகின்றன. QR, AB ஆகிய நேர்கோட்டுத் துண்டங்கள் T இல் இடைவெட்டுகின்றன.



a. $Q\hat{T}A = x$ ஆயின் x இன் சார்பில்

(i) $L\hat{R}T$ இன் பெறுமானம்

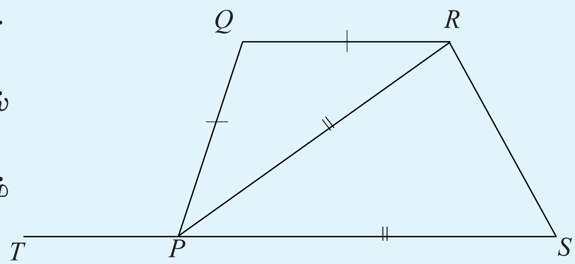
(ii) $O\hat{P}Q$ இன் பெறுமானம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

b. $QTOP$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனக் காட்டுக.

6. $PQ = QR$ உம் $PR = PS$ உம் ஆகும். $P\hat{R}S = 2\, Q\hat{R}P$ ஆயின்,

(i) $PSRQ$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனவும்

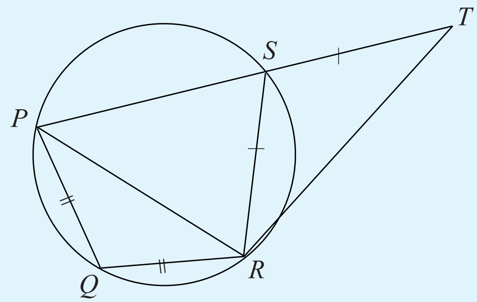
(ii) $Q\hat{P}T : P\hat{R}S = 3 : 2$ எனவும் காட்டுக.



7. வட்ட நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $PQ = QR$ ஆகும். $RS = ST$ ஆகுமாறு பக்கம் PS ஆனது T வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. $S\hat{R}T = 32^{o}$ ஆகுமாயின்

(i) $Q\hat{R}P$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) QS, RT ஆகிய பக்கங்கள் சமாந்தரமானவை எனக் காட்டுக.



22

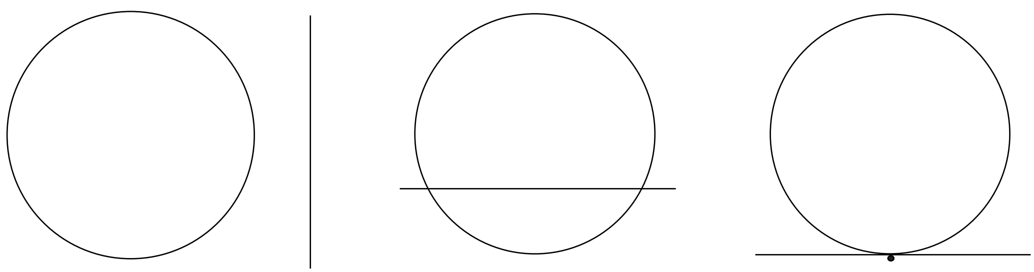
தொடலிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட ஒரு தொடலியையும் அதன் பண்புகளையும் அறிந்துகொள்வதற்கும்
- புறத்தே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் பண்புகளை அறிந்துகொள்வதுக்கும்
- ஒன்றுவிட்ட துண்டத்திலுள்ள கோணத்தை அறியவும் அது தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

22.1 தொடலிகள்



உரு (i) உரு (ii) உரு (iii)

உரு (i) இலுள்ள வட்டத்துக்கும் நேர்கோட்டுக்கும் பொதுவான புள்ளிகள் இல்லை. இப்போது நேர்கோடானது வட்டத்துக்குப் புறத்தே அமைந்துள்ளது.

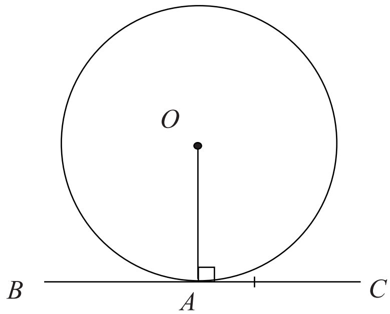
உரு (ii) இல் நேர்கோட்டினால் வட்டமானது இரண்டு புள்ளிகளில் இடைவெட்டப்படுகின்றது. நேர்கோட்டுக்கும் வட்டத்துக்கும் இரண்டு பொதுப் புள்ளிகள் உண்டு. இப்போது நேர்கோடானது வட்டத்தின் **இடைவெட்டி** எனப்படும்.

உரு (iii) இல் நேர்கோட்டுக்கும் வட்டத்துக்கும் ஒரு பொதுப் புள்ளி மாத்திரம் உண்டு. இப்போது நேர்கோடானது வட்டத்தைத் தொடுகின்றது எனக் கூறப்படுவதுடன் நேர்கோடானது வட்டத்தின் **தொடலி** எனப்படும்

தொடலிக்கும் வட்டத்துக்கும் உள்ள பொதுப் புள்ளி **தொடுபுள்ளி** எனப்படும்.

ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு

வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு பற்றிய விடயங்களைக் கற்பதற்காகக் கீழேயுள்ள விடயங்களில் கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.



மேலேயுள்ள உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி A யில் வரையப்பட்ட ஆரை OA ஆகும். OA இற்குப் புள்ளி A யில் வரைந்த செங்குத்து BC ஆகும். இங்கு BC என்னும் கோட்டுத் துண்டம் வட்டத்தை A யில் தொடுகின்றது என்பதும் தெளிவாகும்.

அதாவது,

வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி A யில் ஆரை OA யிற்குச் செங்குத்தாக வரைந்த கோட்டுத் துண்டம் BC ஆனது இவ்வட்டத்துக்கு ஒரு தொடலி ஆகும். இப்பேற்றை ஒரு தெற்றமாக இப்போது முன்வைக்கலாம்.

தேற்றம் : ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியினூடாக ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு வட்டத்தின் தொடலி ஆகும்.

மேலும் இத்தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

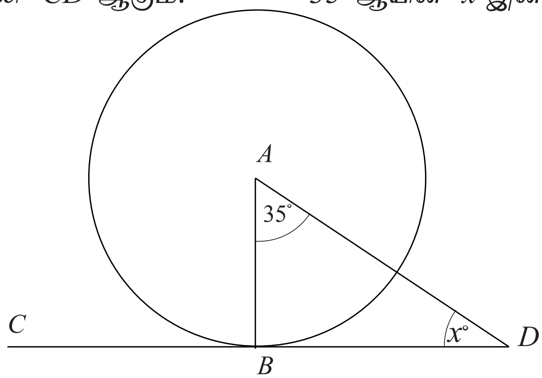
அதாவது வட்டத்தின் மீதுள்ள எந்தவொரு புள்ளியிலும் ஒரு தொடலியை வரைந்து தொடுபுள்ளியிலேயே ஆரையும் வரையும்போது அத்தொடலியும் ஆரையும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

இப்பேற்றை ஒரு தேற்றமாக இவ்வாறு முன்வைக்கலாம்.

தேற்றத்தின் மறுதலை : ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலி, தொடுபுள்ளியில் வரைந்த ஆரைக்குச் செங்குத்தாகும்.

உதாரணம் 1

மையம் A ஆகவுடைய வட்டதின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளி B யில் வரையப்பட்ட தொடலி CD ஆகும். $B\hat{A}D = 35^o$ ஆயின் x இன் பெறுமானம் காண்க.

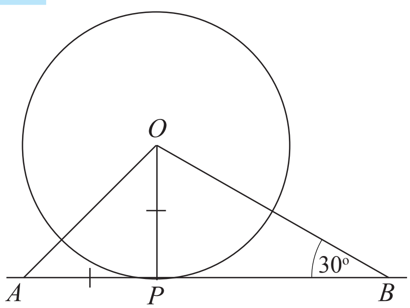


$A\hat{B}D = 90^o$ (ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலியானது தொடுபுள்ளியினூடாக வரைப்பட்ட ஆரைக்குச் செங்குத்து என்பதால்)

ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^o என்பதால்

$$35^o + 90^o + x^o = 180^o$$
$$x = 180^o - 35^o - 90^o$$
$$x = 55^o$$

உதாரணம் 2



உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு P யில் வரையப்பட்ட தொடலி AB ஆகும். $OP = AP$, $O\hat{B}P = 30^\circ$ ஆயின் $A\hat{O}B$ யின் பெறுமானம் காண்க.

$O\hat{P}A = 90^\circ$ (ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலியானது தொடுபுள்ளியினூடாக வரைப்பட்ட ஆரைக்குச் செங்குத்து என்பதால்)

$OP = AP$ (தரவு)

$\therefore P\hat{O}A = P\hat{A}O$ (ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியில் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரான கோணங்கள் சமன் என்பதால்)

$\Delta\, APO$ வில்

$P\hat{A}O + P\hat{O}A + O\hat{P}A = 180^\circ$ (ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்)

$\therefore\ P\hat{A}O + P\hat{O}A + 90^\circ = 180^\circ$

$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 180^\circ - 90^\circ$

$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 90^\circ$

$\therefore 2\, P\hat{A}O = 90^\circ$ ($P\hat{A}O = P\hat{O}A$ என்பதால்)

$P\hat{A}O = \dfrac{90^\circ}{2}$

$= 45^\circ$

முக்கோணி AOB

$A\hat{O}B + P\hat{A}O + P\hat{B}O = 180^\circ$ (ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்)

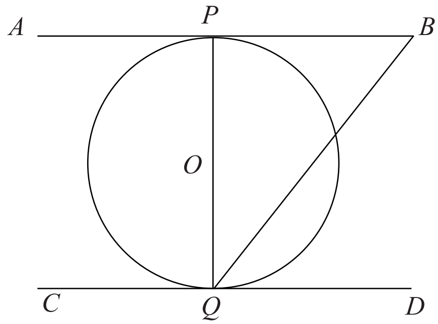
$A\hat{O}B + 45^\circ + 30^\circ = 180^\circ$

$A\hat{O}B + 75^\circ = 180^\circ$

$A\hat{O}B = 180^\circ - 75^\circ$

$= 105^\circ$

உதாரணம் 3



PQ எனப்படுவது O வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் விட்டமாகும். வட்டத்திற்கு P, Q ஆகியவற்றில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் முறையே AB, CD ஆகும். $P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ எனக் காட்டுக.

ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலியானது தொடுபுள்ளியினூடாக வரையப்பட்ட ஆரைக்குச் செங்குத்து என்பதால்

$Q\hat{P}B = 90^\circ$,

$P\hat{Q}D = 90^\circ$ ஆகும்.

$\therefore\ Q\hat{P}B + P\hat{Q}D = 90^\circ + 90^\circ$

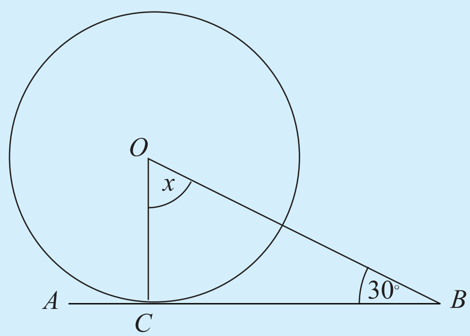
$= 180^\circ$

$\therefore\ AB \,//\, CD$ (நேயக் கோணங்களின் மிகை நிரப்பிகள் என்பதால்)

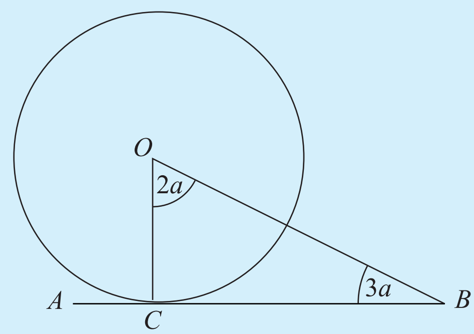
$\therefore\ P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ ($AB \,//\, CD$ ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

பயிற்சி 22.1

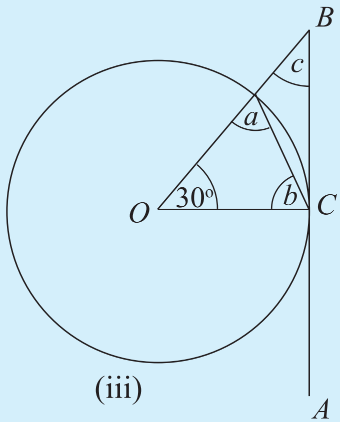
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்திலும் மையம் O வும் AB என்பது வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி C யில் வரையப்பட்ட தொடலியுமாகும். தரப் பட்டுள்ள தரவுகளின்படி அட்சரகணிதக் குறியீடுகளினால் தரப்படும் பெறுமானம் காண்க.



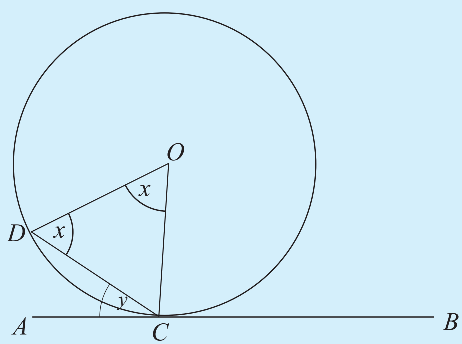
(i)



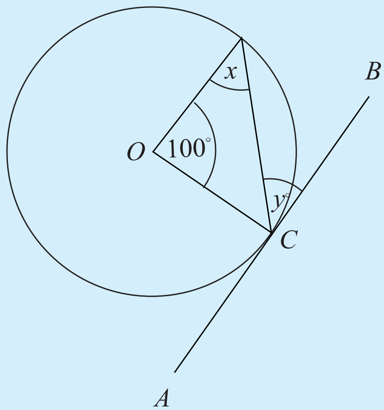
(ii)



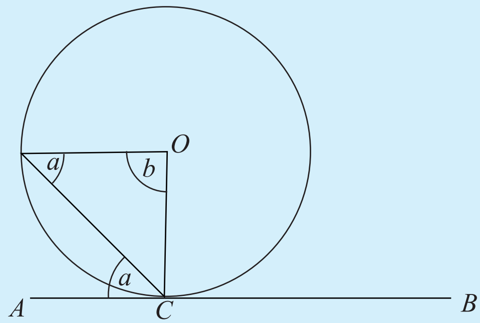
(iii)



(iv)

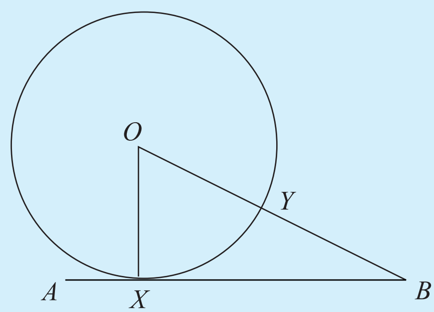


(v)

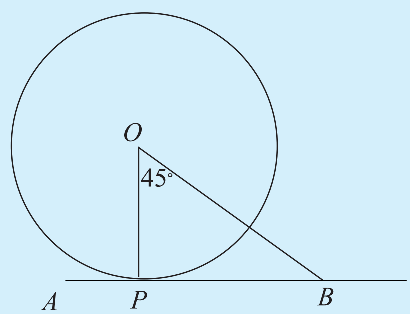


(vi)

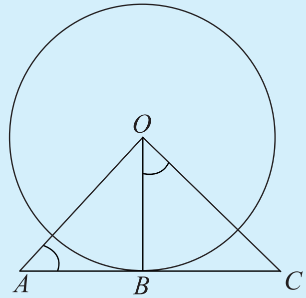
2. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் அமைந்துள்ள புள்ளி X இல் வரையப்பட்ட தொடலி AB ஆகும். கோடு OB யினால் வட்டமானது புள்ளி Y யில் இடைவெட்டப்படுகின்றது. வட்டத்தின் ஆரை 6 cm , YB = 4 cm ஆயின் XB யின் நீளத்தைக் காண்க.



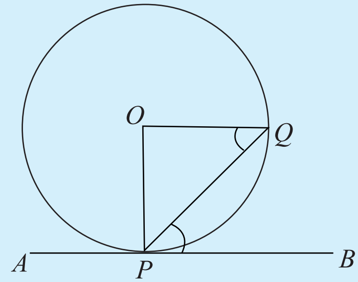
3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு P யில் வரையப்பட்ட தொடலி AB உம் $B\hat{O}P = 45^\circ$ உம் $PB = 6$ cm உம் ஆயின் வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.



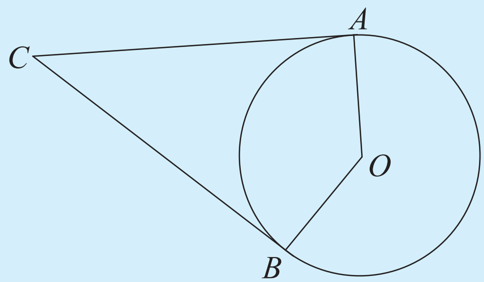
4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்துக்கு புள்ளி B யில் வரைந்த தொடலி AC ஆகும். $O\hat{A}B = B\hat{O}C$ ஆயின் $A\hat{O}B = B\hat{C}O$ எனக் காட்டுக.



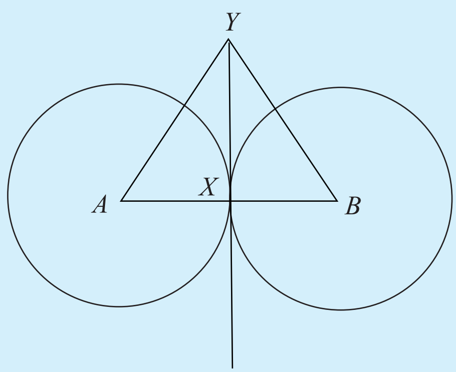
5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்திலுள்ள புள்ளி P யில் வரையப்பட்ட தொடலி AB ஆகும். $O\hat{Q}P = Q\hat{P}B$ ஆகுமாறு புள்ளி Q ஆனது வட்டத்தின் மீது அமைந்தள்ளது. OQ செங்குத்து PO எனக் காட்டுக.



6. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் மீதுள்ள A, B ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் புள்ளி C யில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டு கின்றன. $AOBC$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனக் காட்டுக.



7. உருவில் A, B ஆகியவற்றை மையங்களாகவுடைய சமனான ஆரை களைக் கொண்ட இரண்டு வட்டங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. புள்ளி Y ஆனது $AY = YB$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. கோடு YX ஆனது இரண்டு வட்டங்களுக்கும் பொதுத் தொடலி ஆகின்றதெனக் காட்டுக.

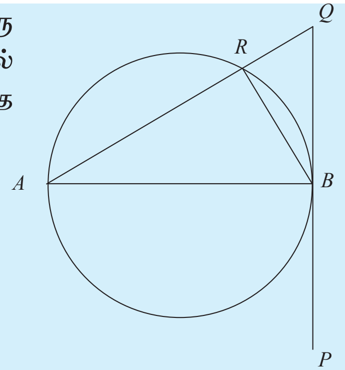


8. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தில் AB ஆனது ஒரு விட்டமாவதுடன் PQ ஆனது புள்ளி B யில் வட்டத்தைத் தொடுகின்றது. AQ ஆனது வட்டத்தை R இல் சந்திக்கின்றது.

(i) $Q\hat{R}B = 90^{\circ}$ எனவும்

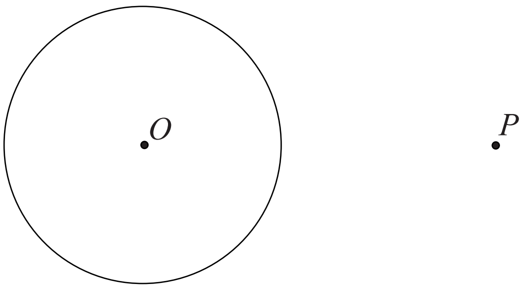
(ii) $A\hat{B}R = R\hat{Q}B$ எனவும்

நிறுவுக.

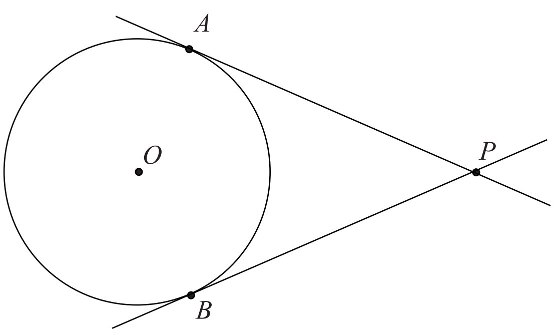


22.2 ஒரு புறப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள்

O வை மையமாகடைய வட்டத்துக்குப் புறத்தே அமைந்துள்ள புள்ளி P யைக் கருதுவோம்.

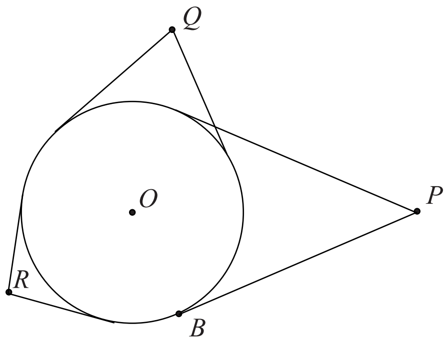


இப்புள்ளி P யிற்கூடாக வட்டத்தைத் தொடுகின்ற இரண்டு கோடுகளை வரையலாம். அவ்வாறு வரையப்பட்டுள்ள இரண்டு கோடுகள் உருவில் தரப்பட்டுள்ளன.



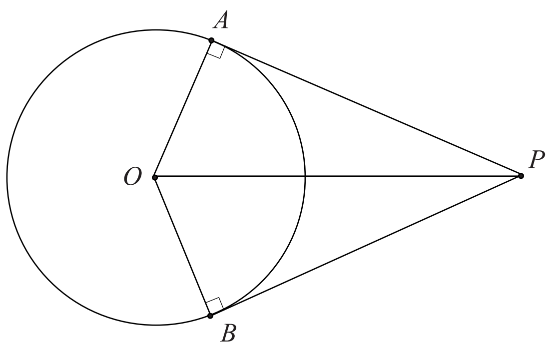
இந்த இரண்டு தொடலிகளும் புறப்புள்ளி P யிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் என அழைக்கப்படும்.

புள்ளி P ஆனது வட்டத்துக்கு புறத்தே எங்கே அமைந்திருப்பினும் இவ்வாறானத் தொடலிச் சோடியொன்றை வரைய முடியும் என்பதை விளங்கிக் கொள்க. கீழேயுள்ள உருவில் P, Q, R ஆகிய மூன்று புள்ளிகளிலிருந்து வரையப்பட்ட மூன்று சோடித் தொடலிகள் தரப்பட்டுள்ளன.



புறத்தே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்துக்கு இவ்வாறு ஒரு சோடி தொடலிகளை வரையும்போது பெறப்படும் உருவிலுள்ள கேத்திரகணிதப் பண்புகளைப் பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

தொடலிகள் இரண்டையும் AP, BP எனக் குறித்து ஆரைகளான OA, OB ஆகியவற்றையும் கோட்டுத் துண்டம் OP ஐயும் வரைவோம்.



மேலே பகுதி 22.1 இல் கற்றதற்கேற்பத் தொடலியும் தொடுப்புள்ளியில் வரைந்த ஆரையும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை என்பதால் அது பற்றி உருவில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

இவ்வுருவிலுள்ள முக்கோணிகளான OAP, OBP ஆகியவற்றை நோக்கும்போது சமச்சீரின்படி அவை ஒருங்கிசைகின்றன என்பதை ஊகிக்க முடியும். உண்மையிலேயே

அவை ஒருங்கிசைகின்ற முக்கோணி என்பதை இலகுவாக நிறுவலாம். அந்நிறுவலைச் செய்யும் முறையைப் பற்றி முதலில் விளங்கிக் கொள்வோம். அதற்கு அம்முக்கோணிகள் இரண்டும் செங்கோண முக்கோணிகள் என்பதை முதலில் அவதானிக்கவும். இதற்கேற்ப ஒரு முக்கோணியின் செம்பக்கத்தையும் இன்னொரு பக்கத்தையும் மற்றைய முக்கோணியின் செம்பக்கத்துக்கும் மற்றுமொறு பக்கத்துக்கும் சமனெனக் காட்டுவதன் மூலம் செ. ப.ப. என்ற சந்தர்ப்பத்தின் கீழ் இந்நிறுவலைச் செய்யலாம். இரண்டு முக்கோணிகளின் செம்பக்கம் OP என்னும் பொதுப் பக்கமாகும். மேலும் OA, OB என்பன ஆரைகள் என்பதால் அப்பக்கங்களும் சமனானவை ஆகும். அதற்கேற்ப இரண்டு முக்கோணிகளும் செ.ப.ப என்னும் சந்தர்ப்பத்தில் ஒருங்கிசைகின்றன. அவ்வாறு ஒருங்கிசைந்த பின்னர் ஒத்த உறுப்புகள் சமனாவதால்,

(i) $AP = BP$ ஆகும். அதாவது இரண்டு தொடலிகளும் நீளத்தில் சமனானவை.

(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ ஆகும். அதாவது இரண்டு தொடலிகளுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் OQ இனால் இருசமகூறிடுகின்றன.

(iii) $A\hat{O}P = B\hat{O}P$ ஆகும். அதாவது தொடலிகள் மையத்தில் சமனான கோணங்களை எதிரமைக்கின்றன.

இங்கு நாம் கரலந்துரையாடிய விடயங்கள் ஒரு தேற்றமாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

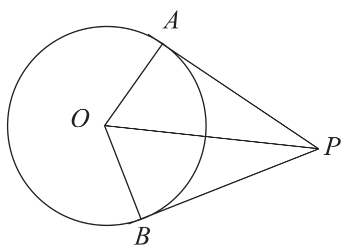
தேற்றம் : புறப் புள்ளியொன்றிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடலிகள் வரையப்படின்

(i) இரண்டு தொடலிகளும் நீளத்தில் சமனானவை ஆகும்.

(ii) புறப் புள்ளியையும் வட்டத்தின் மையத்தையும் இணைக்கும் நேர் கோடு இரண்டு தொடலிகளுக்கும் இடையிலான கோணத்தை இருசமகூறிடும்.

(iii) தொடலிகள் மையத்தில் சமனான கோணங்களை எதிரமைக்கும்

இத்தேற்றத்தை முறையாக நிறுவும் முறையை ஆராய்வோம்.



தரவு : O வை மையமாகவுடைய வட்டதுக்குப் புறப்புள்ளி P யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் முறையே A, B இல் வட்டத்தைத் தொடுகின்றன.

நிறுவ வேண்டியது :

(i) $AP = BP$

(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$

(iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$

நிறுவல் : $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^o$ (தொடலி ஆரைக்குச் செங்குத்து என்பதால்)

$\therefore$ POA, POB ஆகிய முக்கோணிகள் செங்கோண முக்கோணிகள் ஆகும்.

இனி POA, POB ஆகிய முக்கோணிகளில்

$OA = OB$ (ஒரே வட்டத்தின் ஆரைகள்)

OP பொதுப் பக்கம்.

$\therefore$ $\Delta POA \equiv \Delta POB$ (செ.ப.ப.)

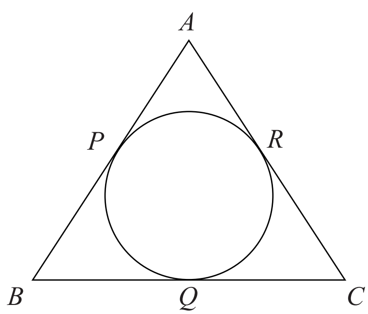
ஒருங்கிசைவான முக்கோணிகளில் ஒத்த உறுப்புகள் சமனாகும்.

$\therefore$ (i) $AP = BP$

$\therefore$ (ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$

$\therefore$ (iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$

உதாரணம் 1



உருவிலுள்ள வட்டத்தை முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. $AB = 11$ cm, $CR = 4$ cm ஆயின் முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவைக் காண்க.

புறப் புள்ளியொன்றிலிருந்து ஒரு வட்டதுக்கு இரண்டு தொடலிகள் வரையப்படும் போது தொடலிகள் நீளத்தில் சமனானவை ஆகும்.

$\therefore$ $AP = AR$ உம்

$BP = BQ$ உம்

$CR = CQ$ உம் ஆகும்.

முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவு $= AB + BC + CA$

$= 11 + (BQ + QC) + (CR + RA)$

$= 11 + (BP + CR) + (4 + AP)$

$= 11 + (BP + 4) + (4 + AP)$

$= 19 + (BP + AP)$

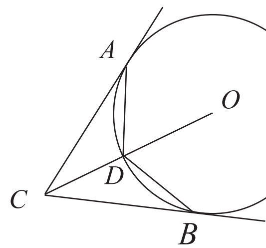
$= 19 + AB$

$= 19 + 11$

$= 30$

$\therefore$ முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவு 30 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2



உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்துக்கு புறத்தே அமைந்துள்ள புள்ளி C யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் A, B ஆகிய புள்ளிகளில் வட்டத்தை தொடுகின்றன. வட்டத்தின் மையம் O வையும் C யையும் இணைக்கும் கோடு D யில் வட்டத்தை வெட்டுகின்றது. $AD = BD$ எனக் காட்டுக.

ACD, BCD ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளையும் ஒருங்கிசையச் செய்வதன் மூலம் தேவையான விடையைப் பெறலாம்.

ACD, BCD ஆகிய முக்கோணிகளில்

$AC = BC$ (ஒரு புறப் புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடலிகள் வரையப்படின் அத்தொடலிகள் நீளத்தில் சமனானவை)

$A\hat{C}O = B\hat{C}O$ (ஒரு புறப் புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடலிகள் வரையப்படின் புறப் புள்ளியையும் வட்டத்தின் மையத்தையும் இணைக்கும் நேர்கோட்டினால் தொடலிகளுக்கு இடையிலான கோணம் இருசமகூறிடப்படும்.)

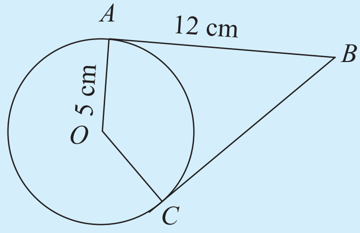
CD பொதுபக்கம்

$\therefore \Delta ACD \equiv \Delta BCD$ (ப.கோ.ப.)

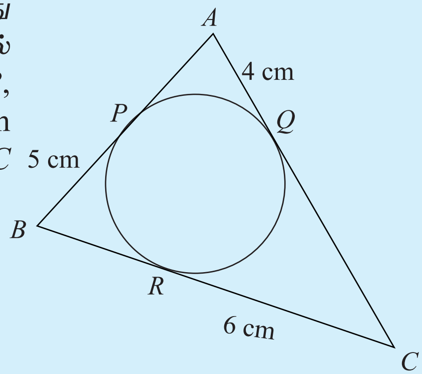
$\therefore AD = BD$ (ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளில் ஒத்த பக்கங்கள் சமன் என்பதால்)

பயிற்சி 22.2

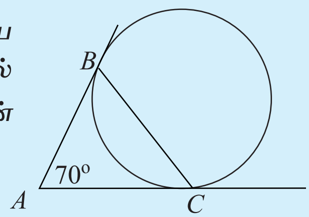
1. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் மீதுள்ள A, C ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகள் B யில் இடைவெட்டுகின்றன. வட்டத்தின் ஆரை 5 cm உம் $AB = 12$ cm உம் ஆயின் நாற்பக்கல் $ABCO$ வின் சுற்றளவைக் காண்க.



2. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ள P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகள் முறையே AB, AC, BC ஆகும். $RC = 6$ cm உம் $BP = 5$ cm உம் $AQ = 4$ cm உம் ஆகும். முக்கோணி ABC இன் சுற்றளவைக் காண்க.

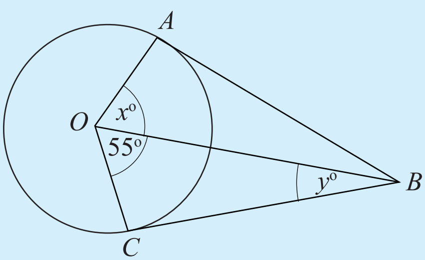


3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மீதுள்ள B, C ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் A இல் இடைவெட்டுகின்றன. $B\hat{A}C = 70^{\circ}$ ஆயின் $A\hat{B}C$ இன் பெறுமானம் காண்க.

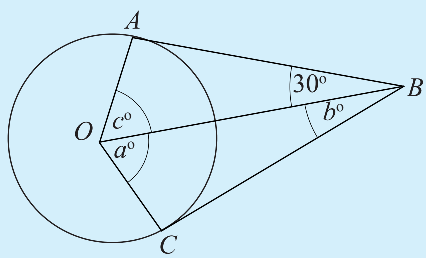


4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்தினதும் மையம் O ஆகும். வட்டத்தில் உள்ள A, C ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் புள்ளி B யில் சந்திக்கின்றன. தரப்பட்டுள்ள உருக்களில் அட்சரகணிதக் குறியீடுகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

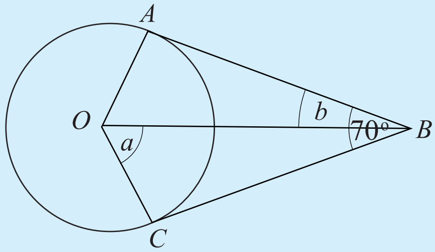
(i)



(ii)

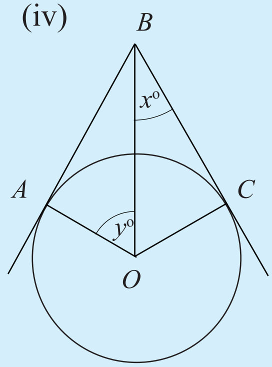


(iii)



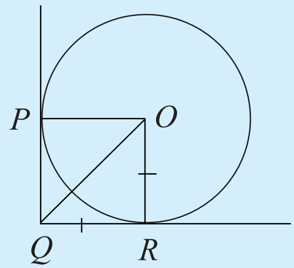
$A\hat{B}C = 70^{\circ}$

(iv)



$A\hat{O}C = 110^{\circ}$

5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தில் P, R ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகள் Q வில் சந்திக்கின்றன. $QR = OR$ ஆயின் $PQRO$ என்பது ஒரு சதுரம் எனக் காட்டுக.

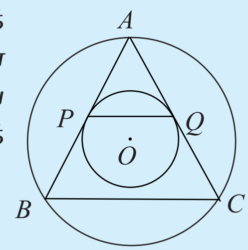


6. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. வட்டத்தின் உள்ளே O வை மையமாகக் கொண்டு அமைந்துள்ள சிறிய வட்டமானது P, Q ஆகிய புள்ளிகளில் AB, AC ஆகியவற்றைத் தொடுகின்றது.

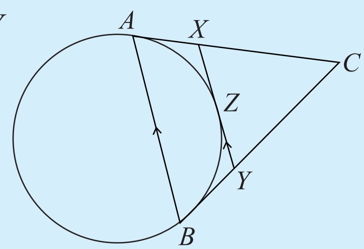
(i) APQ ஓர் இருசமபக்க முக்கோணி எனவும்

(ii) $BC \,//\, PQ$ எனவும்

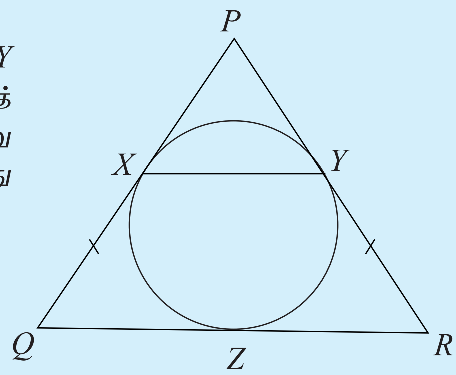
காட்டுக.



7. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $XC = CY$ எனக் காட்டுக. இங்கு AC, BC, XY என்பன வட்டத்தின் தொடலிகள் ஆகும்.

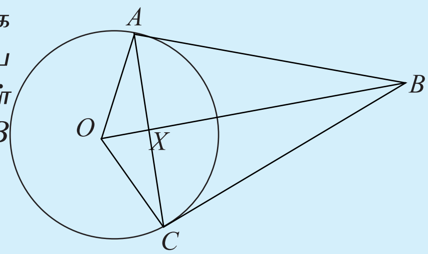


8. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்துக்கு P இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் X , Y ஆகிய புள்ளிகளில் வட்டத்தைத் தொடுகின்றன. $XQ = YR$ ஆகுமாறு வரையப்பட்ட நேர்கோடு QR ஆனது வட்டத்தை Z இல் தொடுகின்றது.



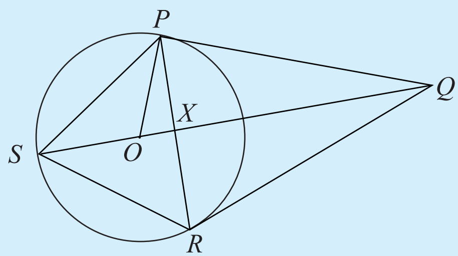
(i) $PR = PQ$ எனவும்
(ii) $QR = XQ + YR$ எனவும்
(iii) $XY \parallel QR$ எனவும்
காட்டுக.

9. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாக வுடைய வட்டத்தின் மீதுள்ள A, C ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் ஒன்றையொன்று B யில் சந்திக்கின்றது. OB ஆனது AC யை X இல் சந்திக்கின்றது.



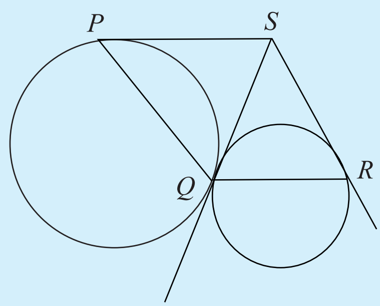
(i) $\Delta OAX \equiv \Delta OCX$ எனவும்
(ii) கோடு OB ஆனது AC யின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கி எனவும்
(iii) $A\hat{O}C = 2\,A\hat{C}B$ எனவும்
காட்டுக.

10. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு Q விலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் PQ, QR ஆகும். நீட்டப்பட்ட கோடு QO ஆனது வட்டத்தை S இல் சந்திக்கின்றது. PR உம் SQ வும் X இல் சந்திக்கின்றன.



(i) $\Delta PQS \equiv \Delta QRS$ எனவும்
(ii) $2\,O\hat{P}X = P\hat{Q}R$ எனவும்
காட்டுக.

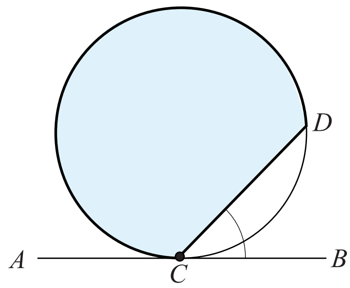
11. உருவிலுள்ள இரண்டு வட்டங்களும் Q வில் வெளிப்புறமாக தொடுகின்றன. QS ஆனது பொதுத் தொடலியாகும். S இல் இருந்து இரு வட்டங்களுக்கும் வரையப்பட்ட மற்றைய தொடலிகள் P, R இல் வட்டத்தைத் தொடுகின்றன.



(i) $PS = SR$ எனவும்
(ii) $P\hat{Q}R = S\hat{P}Q + S\hat{R}Q$ எனவும்
காட்டுக.

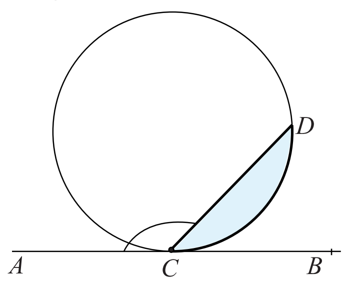
22.3 ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணங்கள்

முதலில் ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணம் என்பதால் கருதப்படுவது யாதென்பதை ஆராய்வோம். இதற்கு கீழேயுள்ள உருவின் மீது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.



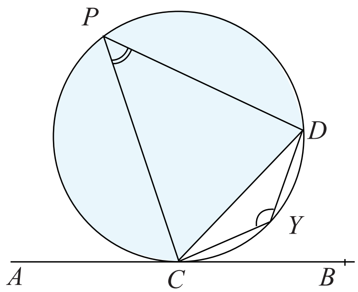
உருவிலுள்ளவாறு நேர்கோடு AB ஆனது வட்டத்தை C யில் தொடுகின்றது. CD ஒரு நாண் ஆகும். CD என்னும் நாணின் மூலம் வட்டம் இரண்டு வட்டத் துண்டங்களாப் பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒரு துண்டம் உருவில் நீல நிறத்தினால் நிழற்றப்பட்டுள்ளப் பகுதியாகும். மற்றைய துண்டம் அவ்வாறு நிழற்றப்படாத சிறிய பகுதியாகும். தொடலி AB யின் மீது நாண் CD யினால் இரண்டு கோணங்கள் உருவாகின்றன. ஒரு கோணம் $A\hat{C}D$ ஆகும். மற்றையது $B\hat{C}D$ ஆகும். BCD கோணத்துக்கு ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட துண்டமாக குறிப்பிடப்படுவது நீல நிறத்தினால் நிழற்றப்பட்டுள்ள வட்டத்துண்டமாகும். $B\hat{C}D$ என்னும் இக்கோணமானது அமைந்திருப்பது மற்றைய வட்டத்துண்டத்தினுள் என்பதை அவதானிக்க. அவ்வாறே கோணம் $A\hat{C}D$ இற்கு ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட துண்டமாகக் குறிப்பிடப்படுவது நிழற்றப்படாத மற்றைய வட்டத் துண்டமாகும். $A\hat{C}D$ என்னும் அகக் கோணம் அமைந்திருப்பது மற்றைய (நீல நிறமுடைய) வட்டத் துண்டத்தில் என்பதையும் அவதானிக்க.

கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் கோணம் $A\hat{C}D$ இற்கு ஒத்த ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டம் இளநீல நிறத்தினால் நிழற்றப்பட்டுள்ளது.



ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டத்தின் கோணங்கள் தொடர்பான தேற்றங்கள்

கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவைப் பார்க்க. $C\hat{P}D$ அமைந்திருப்பது இளநீல நிறமுடைய பெரிய வட்டத் துண்டத்திலாகும். அதாவது கோணங்கள் $C\hat{P}D$, $D\hat{C}B$ ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று எதிரான வட்டத் துண்டத்திலாகும். அதாவது கோணங்கள் $C\hat{Y}D$, $A\hat{C}D$ ஆகிய கோணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று எதிரான வட்டத் துண்டங்களில் அமைந்துள்ளன.

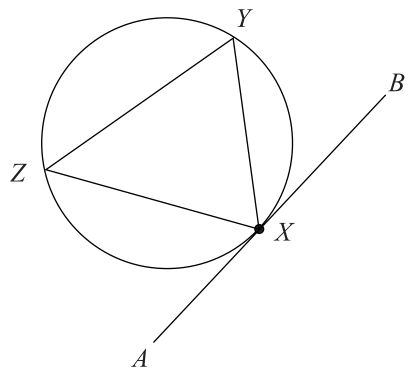


ஒரு வட்டத்தின் தொடலிகள் தொடர்பாக மிகமுக்கியமான ஒரு பேறு உண்டு. அப்பேறினால் கூறப்படுவது மேற்குறித்த உருவின்படி $D\hat{C}B$, $C\hat{P}D$ ஆகிய கோணங்கள் சமன் என்பதும் $A\hat{C}D$, $C\hat{Y}D$ ஆகிய கோணங்கள் சமன் என்பதும் ஆகும். வேறொரு விதமாகக் கூறுவதாயின் ஒரு வட்டத்தின் தொடலிக்கும் தொடு புள்ளியில் வரையப்பட்ட வட்டத்துண்டத்திலுள்ள கோணத்துக்கு அந்நாணினால் ஒன்றுவிட்ட வட்டத்துண்டத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் சமனாகும். இப்பேறானது மிக முக்கியமானது என்பதால் அதனை ஒரு தேற்றமாகக் கூறி நினைவில் வைத்திருப்போம்.

தேற்றம் : ஒரு வட்டத்துக்கு வரைந்த தொடலிக்கும் தொடுபுள்ளியில் வரைந்த நாணுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டத்தில் அந்நாணினால் எதிரமைக்கப்படும் கோணத்திற்குச் சமனாகும்.

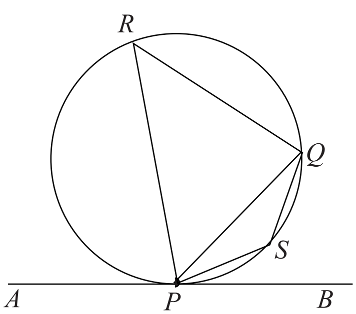
இத்தேற்றத்தின் உண்மையை உறுதிப்படுத்துவதற்காகக் கீழேயுள்ள செயற்பாடுகளில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு 1



- ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மீது ஒரு புள்ளியைக் குறித்து அதனை X எனப் பெயரிடுக.
- புள்ளி X இல் வட்டத்தைத் தொடும் ஒரு நேர்கோட்டை வரைந்து (X இல் வட்டத்துக்கு ஓர் ஆரையை வரைந்து அதற்குச் செங்குத்தாக X இல் ஒரு நேர்கோடு வரைவதன் மூலம் இதனைச் செய்யலாம்.) அதனை AB எனப் பெயரிடுக.
- வட்டத்தின் மீது மேலும் இரண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை Y, Z எனப் பெயரிடுக.
- உருவிலுள்ளவாறு X, Y, Z ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்க .
- பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $B\hat{X}Y$ மற்றும் அதற்கு ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட வட்டதுண்டக் கோணமாகிய $X\hat{Z}Y$ இன் பெறுமானங்களை அளந்து அவை சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.
- அவ்வாறே $A\hat{X}Z$ மற்றும் அதற்கு ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணமாகிய$X\hat{Y}Z$ இன் பெறுமானங்களை அளந்து அவை சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

செயற்பாடு 2

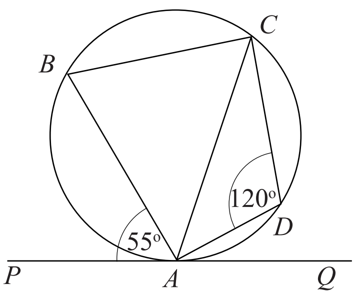


- ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மீது ஒரு புள்ளியைக் குறித்து அதனை P எனப் பெயரிடுக. புள்ளி P இல் வட்டத்தைத் தொடும் ஒரு நேர்கோட்டை வரைந்து (P யில் ஓர் ஆரையை வரைந்து அதற்குச் செங்குத்தாக P யில் ஒரு கோட்டை வரைவதன் மூலம் இதனைச் செய்யலாம்) அதனை AB எனப் பெயரிடுக.

- புள்ளி P யிலிருந்து ஒரு நாணை வரைந்து அதனை PQ எனப் பெயரிடுக.
- நாண் PQ வின் இருபக்கங்களிலும் அமையுமாறு வட்டத்தின் மீது இரண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து R, S எனப் பெயரிடுக.
- QR, QS, PS, PR ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்களை வரைக.
- பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $B\hat{P}Q$ மற்றும் அதற்கு ஒத்த ஒன்றுவிட்டத் துண்டக் கோணமான $P\hat{R}Q$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை அளந்து அவை சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.
- அவ்வாறே, $A\hat{P}Q$ மற்றும் அதற்கு ஒத்த ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணமாகிய $P\hat{S}Q$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை அளந்து அவை சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

ஒரு வட்டத்தின் தொடலிக்கும் தொடுபுள்ளியிலுள்ள நாணுக்கும் இடையிலுள்ள கோணமானது ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணத்துக்குச் சமனாகின்றது என்பதை மேற்குறித்த செயற்பாட்டின் மூலம் விளங்கிக் கொண்டிருப்பீர்கள்.

உதாரணம் 1



மேலே காட்டப்பட்டுள்ள உருவில் கோடு PQ ஆனது வட்டத்தை A யில் தொடுகின்றது. மேலும் B, C, D ஆகிய புள்ளிகளும் வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன. $P\hat{A}B = 55^\circ$யும் $A\hat{D}C = 120^\circ$ யும் ஆகும். $B\hat{A}C$ இன் பெறுமானம் காண்க.

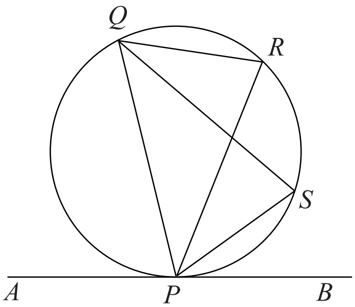
முதலில் $P\hat{A}C$ பெறுமானம் காண்போம்.

$P\hat{A}C = A\hat{D}C$ (ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணங்கள்)

$$P\hat{A}B + B\hat{A}C = 120^\circ$$
$$55^\circ + B\hat{A}C = 120^\circ$$
$$B\hat{A}C = 120^\circ - 55^\circ$$
$$= 65^\circ$$

உதாரணம் 2

நேர்கோடு AB ஆனது வட்டத்தை P யில் தொடுகின்றது. Q வும் R உம் வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன. கோணம் $P\hat{Q}R$ இன் இருசமகூறாக்கி வட்டத்தை S இல் சந்திக்கின்றது. PS ஆனது $B\hat{P}R$ இன் இருசமகூறாக்கி எனக் காட்டுக.



$B\hat{P}S = P\hat{Q}S$ (ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணங்கள்)

$R\hat{P}S = R\hat{Q}S$ (ஒரே துண்டக் கோணங்கள்)

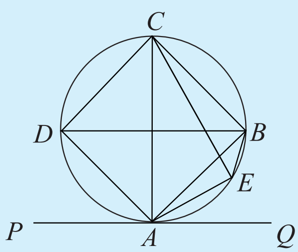
$P\hat{Q}S = R\hat{Q}S$ (தரவு QS ஆனது $P\hat{Q}R$ இல் இருசமகூறாக்கி)

$\therefore\ B\hat{P}S = R\hat{P}S$

$\therefore$ PS ஆனது $B\hat{P}R$ இன் இருசமகூறாக்கியாகும்.

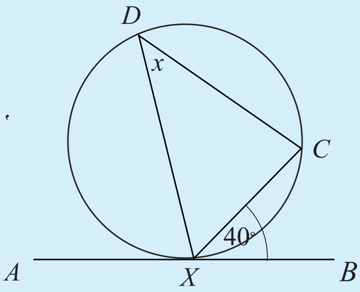
பயிற்சி 22.3

1. கோடு PQ ஆனது புள்ளி A யில் வட்டத்தைத் தொடுகின்றது. B, C, D, E ஆகிய புள்ளிகள் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன.

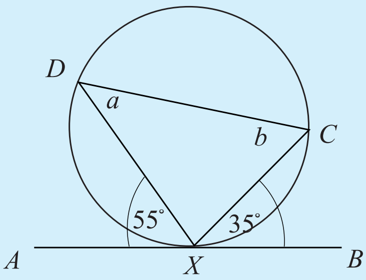


தொடலிக்கும் நாணுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம்	ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணங்கள்
$B\hat{A}Q$	....
$P\hat{A}B$	....
$P\hat{A}D$	....
$E\hat{A}Q$	....
....	$D\hat{B}A$
....	$D\hat{C}A$

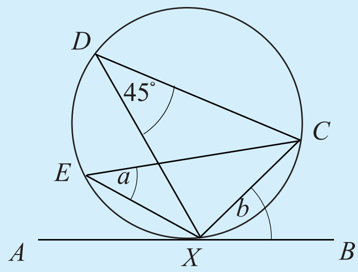
2. ஒவ்வோர் உருவிலும் AB எனக் காட்டப்படுவது புள்ளி X இல் வரையப்பட்டுள்ள தொடலி ஆகும். அட்சரகணிதக் குறியீடுகளால் தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களைக் காண்க.



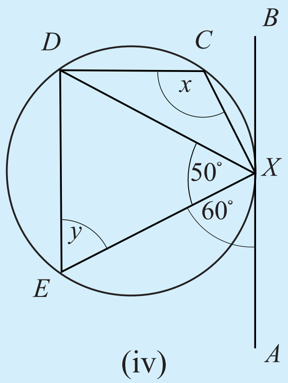
(i)



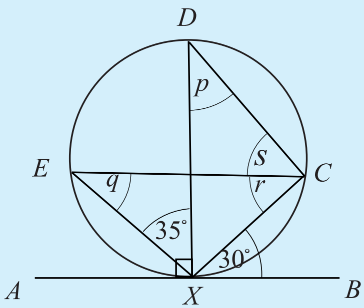
(ii)



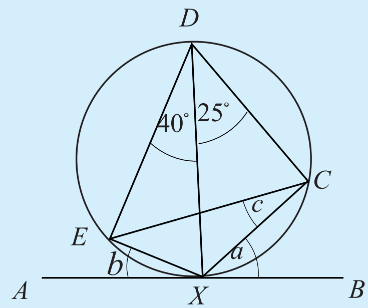
(iii)



(iv)

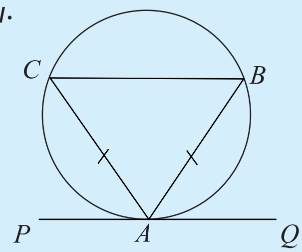


(v)



(vi)

3. PQ ஆனது வட்டத்தைப் புள்ளி A யில் தொடுக்கின்றது.
$AC = AB$ ஆயின்
(i) $C\hat{A}P = B\hat{A}Q$ எனவும்
(ii) $PQ \mathbin{//} CB$ எனவும்
காட்டுக.



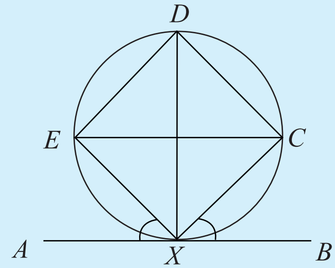
4. AB ஆனது புள்ளி X இல் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலி ஆகும். C, E ஆகிய புள்ளிகள் $B\hat{X}C = A\hat{X}E$ ஆகுமாறு வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன D என்பது வட்டத்தின் மீதுள்ள இன்னுமொரு புள்ளியாகும்.

(i) XD ஆனது $E\hat{D}C$ யின் கோண இருசமகூறாக்கி எனவும்

(ii) $EX = CX$ எனவும்

(iii) $AB // EC$ எனவும்

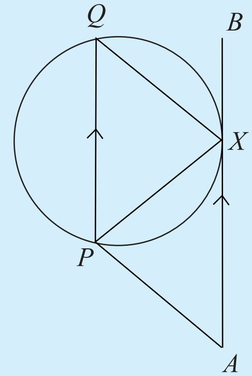
காட்டுக.



5. கோடு AB ஆனது வட்டத்தை X தொடுகின்றது. $PQ // AB$ ஆகுமாறு நாண் PQ வரையப்பட்டுள்ளது.

(i) $B\hat{X}Q = A\hat{X}P$ என நிறுவுக.

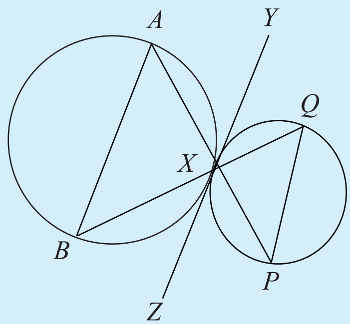
(ii) $PX = PA$ ஆயின் $AXQP$ ஓர் இணைகரம் எனக் காட்டுக.



6. இரண்டு வட்டங்கள் வெளிப் புறமாக புள்ளி X இல் தொடுகின்றன. YZ ஆனது பொதுத் தொடலி ஆகும். AB ஆனது ஒரு வட்டத்தின் நாண் ஆகும். நீட்டப்பட்ட AX, BX ஆகியவை மற்றைய வட்டத்தை முறையே P, Q என்பவற்றில் சந்திக்கின்றன.

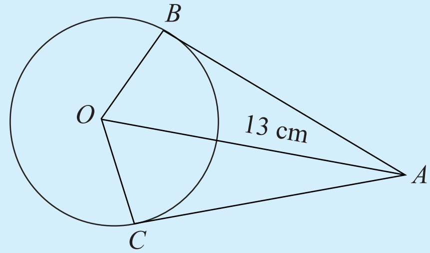
(i) $B\hat{X}Z = X\hat{P}Q$ எனக் காட்டுக.

(ii) $AB // PQ$ எனக் காட்டுக.

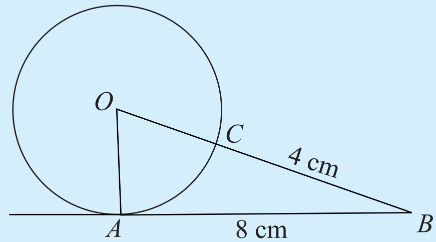


பலவினப் பயிற்சி

1. O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு A இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் B, C ஆகியவற்றில் வட்டத்தைத் தொடுகின்றன. வட்டத்தின் ஆரை 5 cm, $OA = 13$ cm ஆயின் நாற்பக்கல் $OBAC$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.



2. O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு A இல் வரையப்பட்டுள்ள தொடலி AB ஆகும். OB ஆனது C யில் வட்டத்தை இடைவெட்டுகின்றது. $CB = 4$ cm, $AB = 8$ cm ஆகும். வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

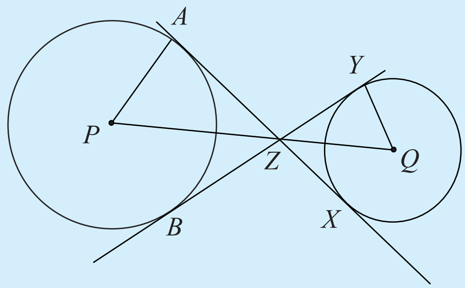


3. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள இரண்டு வட்டங்களிலும் மையங்கள் P, Q ஆகும். P யை மையமாகவுடைய பெரிய வட்டதிற்கு A, B ஆகிய புள்ளிகளுக்கூடாக வரைந்த இரண்டு தொடலிகள் சிறிய வட்டத்தை முறையே X, Y இல் தொடுகின்றது. மேலும் அவை இரண்டும் ஒன்றையொன்று Z இல் சந்திக்கின்றது எனின்

(i) $AX = BY$ எனவும்

(ii) $A\hat{P}Z = Y\hat{Q}Z$ எனவும்

நிறுவுக.



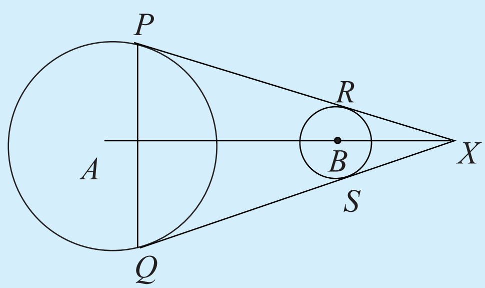
4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தொடலிகள் PX உம் QX உம் வட்டங்களை P, R, Q, S என்னும் புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. வட்டங்களின் மையங்கள் A, B ஆகும்.

(i) $PR = QS$ எனவும்

(ii) PQ // RS எனவும்

(iii) A, B, X ஒரு நேர் கோட்டில் அமைந்துள்ளன எனவும்

காட்டுக.



23 அமைப்புகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- நேர்கோடுகள், கோணங்கள் தொடர்பான அமைப்புகளை அமைப்பதற்கும்
- முக்கோணிகள் தொடர்பான வட்ட அமைப்புகளை அமைப்பதற்கும்
- வட்டத் தொடலிகளை அமைப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

23.1 நேர்கோடுகள், கோணங்கள் தொடர்பான அமைப்புகள்

இப்பாடத்தில் காணப்படும் அமைப்புகளை வரைவதற்குப் பயன்படும் சில அமைப்புகளை இப்போது கற்போம். அவற்றை அமைப்பதற்குக் கவராயமும் நேர்விளிம்பும் மட்டும் பயன்படுத்தப்படும்.

1. ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் செங்குத்து இருசம கூறாக்கியினை அமைத்தல்.

ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கி என்பதால், நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் நடுப் புள்ளியினூடாக நேர்கோட்டுத் துண்டத்துக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு கருதப்படுகின்றது.

நேர்கோட்டுத் துண்டம் AB ஐக் கருதுவோம்.

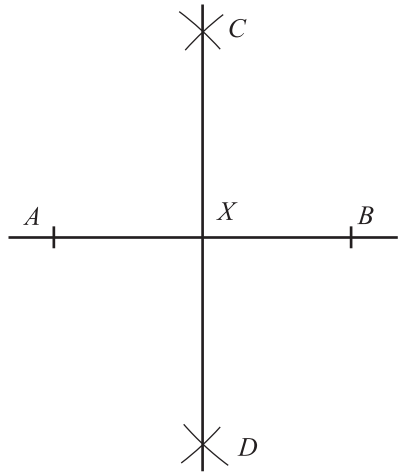


படி 1: கோடு AB இன் நீளத்தில் அரைவாசியிலும் கூடிய ஓர் ஆரை பெறப்படும் வகையில் கவராயத்தைத் தயார்செய்க. புள்ளி A ஐ மையமாகக் கொண்டு நேர்கோட்டின் இரு புறமும் இரண்டு விற்களை வரைக.

படி 2: அதே ஆரையுடன் (அதாவது கவராயத்தின் இடைவெளியை மாற்றாது) புள்ளி B ஐ மையமாகக் கொண்டு, மேலே வரையப்பட்ட இரண்டு விற்களையும் வெட்டுமாறு மேலும் இரண்டு விற்களை வரைக.

படி 3: அவ்விற்கள் இடைவெட்டிய புள்ளிகளை C, D எனப் பெயரிட்டு C, D ஆகியவற்றினூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டை வரைக.

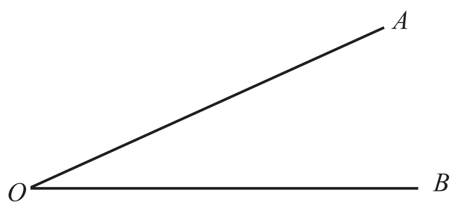
படி 4: வரைந்த நேர்கோட்டுத்துண்டம் கோடு AB ஐ இடைவெட்டும் புள்ளியை X எனப் பெயரிடுக.



CD ஆனது கோட்டுத்துண்டம் AB இன் செங்குத்து இரு சமகூறாக்கியாகும். பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $A\hat{X}C$, $B\hat{X}C$, $A\hat{X}D$, $B\hat{X}D$ ஆகிய கோணங்களை அளப்பதன் மூலமும் cm / mm அளவீடுடைய வரைகோல் ஒன்றைப் பயன்படுத்தி AX, BX ஆகியவற்றின் நீளங்களை அளப்பதன் மூலமும் அதனை உறுதிப்படுத்திக் கொள்க.

2. கோணமொன்றின் இருசமகூறாக்கியை அமைத்தல்.

கோணம் AOB ஐக் கருதுக.

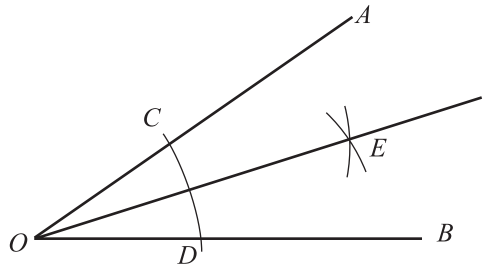


படி 1: OA, OB ஆகிய கோடுகளின் நீளத்திலும் குறைந்த ஆரை கொண்டதாக கவராயத்தை விரித்துப் பெறுக. O ஐ மையமாகக் கொண்டு OA, OB ஆகிய நேர்கோட்டுத்துண்டங்களை இடைவெட்டுமாறு ஒரு வட்ட வில் வரைக.

படி 2: வட்ட வில்லினால் OA, OB ஆகிய கோடுகள் இடைவெட்டப்படும் புள்ளிகளை முறையே C, D எனப் பெயரிடுக.

படி 3: கவராயத்தில் பொருத்தமான ஒரு தூரத்தை ஆரையாகக் கொண்டு C, D ஆகியவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் இரண்டு வட்ட விற்களை வரைக. வெட்டும் புள்ளியை E எனக் குறிக்க.

படி 4: O, E ஐ இணைக்க.



OE இன் மூலம் பெறப்படுவது $A\hat{O}B$ இன் கோண இருசமகூறாக்கி ஆகும். பாகை மானியைப் பயன்படுத்தி $A\hat{O}E$, $B\hat{O}E$ ஆகியவற்றை அளப்பதன் மூலம் அதனை உறுதிப்படுத்திக் கொள்க.

3. நேர்கோட்டுத் துண்டமொன்றில் அமைந்துள்ள தரப்பட்ட ஒரு புள்ளியில் ஒரு செங்குத்தை அமைத்தல்

கோடு AB இன் மீதுள்ள புள்ளி C இல் ஒரு செங்குத்து வரைய வேண்டும் எனக் கொள்வோம்.

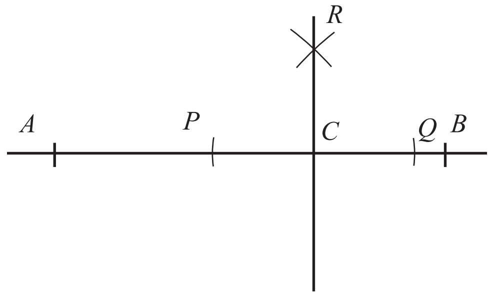


படி 1: பொருத்தமான ஓர் ஆரையை கவராயத்தில் எடுத்து புள்ளி C ஐ மையமாகக் கொண்டு புள்ளி C இன் இருபக்கங்களிலும் அமையுமாறு கோட்டுத் துண்டம் AB இன் மீது விற்களை வரைக.

படி 2: வரைந்த விற்களினால் கோட்டுத் துண்டம் AB இடைவெட்டப்படும் இடங்களை P, Q எனப் பெயரிடுக.

படி 3: P, Q ஆகிய புள்ளிகளை மையங்களாகக் கொண்டு ஒன்றையொன்று இடை வெட்டுமாறு ஒரே ஆரையை உடைய இரண்டு விற்களைக் கோட்டின் மேலே (அல்லது கீழே) வரைக.

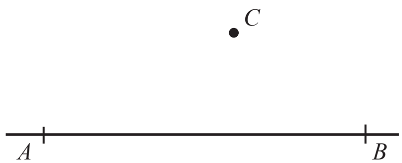
படி 4: வரைந்த இரண்டு விற்களும் இடைவெட்டும் புள்ளியை R எனப் பெயரிட்டு C, R ஆகியவற்றை இணைக்கும் நேர்கோட்டை வரைக.



CR இன் மூலம் C இல் AB இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து பெறப்படும். $A\hat{C}R$, $B\hat{C}R$ ஆகியவற்றின் பருமன்களை அளப்பதன் மூலம் அதனை உறுதிப்படுத்திக் கொள்க.

4. ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்துக்கு வெளியே அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அந்நேர்கோட்டுத் துண்டத்துக்கு ஒரு செங்குத்து அமைத்தல்.

தரப்பட்டுள்ள நேர்கோடு AB எனவும் வெளியே அமைந்துள்ள புள்ளி C எனவும் கொள்வோம்.

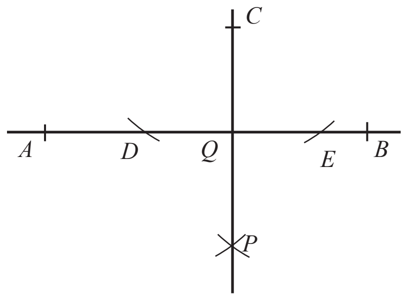


படி 1: C இலிருந்து AB இற்குள்ள தூரத்திலும் சிறிது கூடிய ஒரு தூரம் ஆரையாகப் பெறப்படுமாறு கவராயத்தை விரிக்க. C ஐ மையமாகக் கொண்டு கோட்டுத் துண்டம் AB யை இடைவெட்டுமாறு இரண்டு விற்களை வரைக.

படி 2: வரைந்த விற்களினால் கோட்டுத் துண்டம் AB ஆனது இடைவெட்டப்படும் புள்ளிகளை D, E எனப் பெயரிடுக.

படி 3: மேற்குறித்த ஆரையை (அல்லது வேறு பொருத்தமான ஆரை) கவராயத்தில் எடுத்து D, E ஆகியவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு நேர்கோட்டுத் துண்டம் AB இற்கு C அமைந்துள்ள பக்கத்தின் எதிர்ப் பக்கத்தில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் இரண்டு விற்களை வரைக.

படி 4: வரைந்த இரண்டு விற்களும் இடைவெட்டும் புள்ளியை P எனப் பெயரிட்டு CP ஐ இணைக்க. கோடு CP இனால் கோட்டுத் துண்டம் AB ஆனது இருசமகூறிடப்படும் புள்ளியை Q எனப் பெயரிடுக.



CP ஆனது புள்ளி C இலிருந்து கோட்டுத் துண்டம் AB இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தாகும். பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $C\hat{Q}A$, $C\hat{Q}B$ ஆகியவற்றின் பருமன்களை அளப்பதன் மூலம் அதனை உறுதிப்படுத்துக.

பயிற்சி 23.1

1. $AB = 5.2$ cm ஆகவுள்ள கோட்டுத் துண்டம் AB இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியை வரைக.

2. 90° கோணமொன்றை அமைத்து அதன் இருசமகூறாக்கியை வரைக.

3. $AB = 6$ cm, $A\hat{B}C = 60^{\circ}$, $BC = 5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க. AB இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியையும் அமைக்க.

4. (i) $PQ = 7$ cm, $QR = 6.5$ cm, $PR = 5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி PQR ஐ அமைக்க.

(ii) $Q\hat{P}R$, $P\hat{Q}R$ ஆகியவற்றின் இருசமகூறாக்கிகளை அமைக்க.

5. (i) $XY = 5.5$ cm ஆகவுள்ள ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைக.

(ii) X இல் கோடு XY இற்கான ஒரு செங்குத்தை அமைக்க.

(iii) அச்செங்குத்தின் வழியே X இலிருந்து 4 cm தூரத்திலுள்ள Z என்னும் புள்ளியைக் குறித்து X இலிருந்து YZ இற்கு ஒரு செங்குத்தை அமைக்க.

6. (i) ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 6 cm உடைய ABC என்னும் சமபக்க முக்கோணியொன்றை அமைக்க.

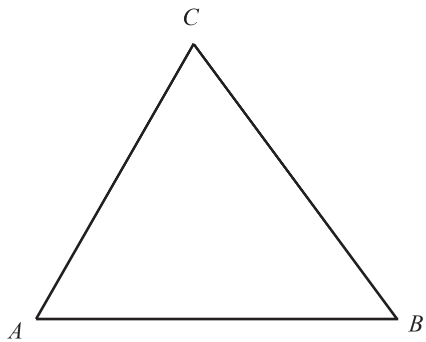
(ii) ஒவ்வோர் உச்சியிலிருந்தும் எதிர்ப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்து வரைக.

23.2 முக்கோணிகள் தொடர்பான வட்ட அமைப்புகள்

ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களும் கோணங்களின் பருமன்களும் தரப்பட்டுள்ளபோது கவராயத்தையும் நேர்விளிம்மையும் பயன்படுத்தி முக்கோணி அமைப்புக்களைச் செய்யும் முறை பற்றி இதற்கு முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள். இனி கவராயத்தையும் நேர்விளிம்பையும் மாத்திரம் பயன்படுத்தி முக்கோணிகள் தொடர்பான வட்ட அமைப்புகளைச் செய்யக்கூடிய மூன்று சந்தர்ப்பங்களைக் கற்போம்.

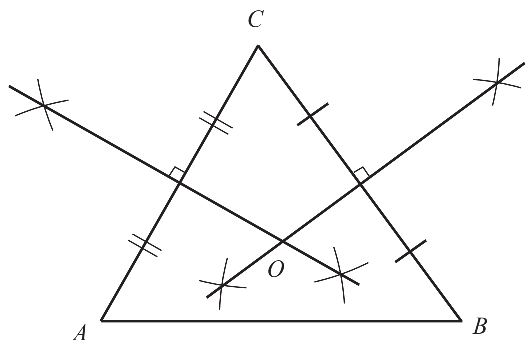
23.3 ஒரு முக்கோணியின் சுற்றுவட்டத்தை அமைத்தல்

ஒரு முக்கோணியை வரைந்து அதனை ABC எனப் பெயரிடுக.

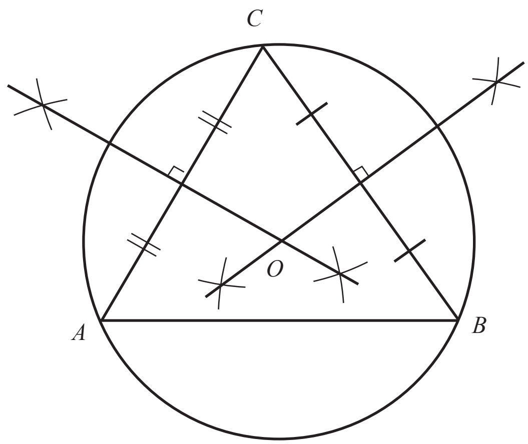


படி 1: கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணி ABC இன் AB, BC, AC ஆகிய மூன்று பக்கங்களில் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கிகளை அமைக்க.

படி 2: செங்குத்து இருசமகூறாக்கிகள் சந்திக்கும் புள்ளிகளை O எனப் பெயரிடுக.



படி 3: O வை மையமாகவும் O விலிருந்து யாதாயினுமோர் உச்சிக்குள்ள தூரத்தை ஆரையாகவும் கொண்டு வட்டமொன்றை வரைக.



மேலே அமைக்கப்பட்ட வட்டமானது முக்கோணி ABC யின் A, B, C ஆகிய மூன்று உச்சிகளுக்கூடாவும் செல்கிறது என்பதை காண்பீர்கள். இவ்வட்டமானது முக்கோணி ABC யின் **சுற்றுவட்டம்** எனப்படும். சுற்று வட்டத்தின் மையம் **சுற்று வட்ட மையம்** எனப்படும்.

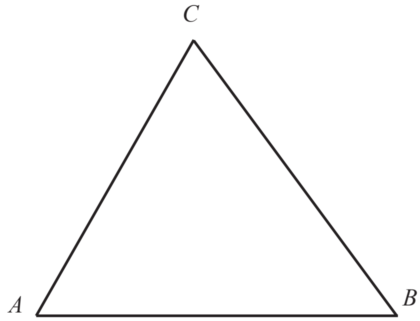
ஒரு செங்கோண முக்கோணியையும் ஒரு விரிகோண முக்கோணியையும் வரைந்து அம்முக்கோணிகளின் சுற்று வட்டங்களை அமைக்க.

அவ்வமைப்புக்களிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

முக்கோணி	சுற்று வட்ட மையத்தின் அமைவிடம்		
	முக்கோணியின் உள்ளே	முக்கோணியின் ஒரு பக்கத்தின் மீது	முக்கோணியின் வெளியே
கூர்ங்கோண முக்கோணி	✓	×	×
செங்கோண முக்கோணி			
விரிகோண முக்கோணி			

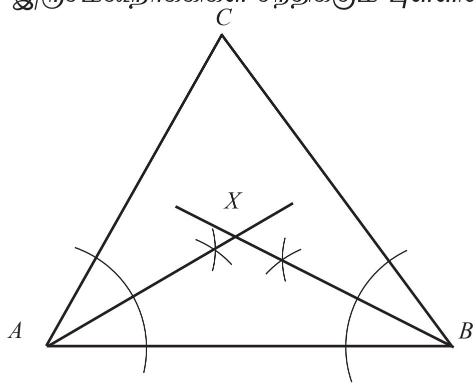
ஒரு முக்கோணியின் உள்வட்டத்தை அமைத்தல்

ஒரு முக்கோணியை வரைந்து அதனை ABC எனப் பெயரிடுக.

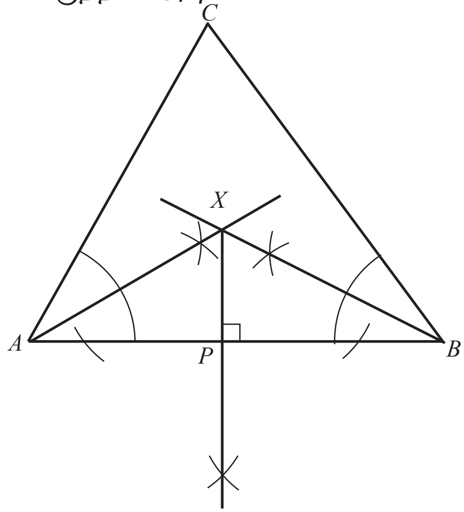


படி 1: கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$, $A\hat{C}B$ ஆகியவற்றில் ஏதேனும் இரண்டு கோணங்களின் இருசமகூறாக்கிகளை அமைக்க.

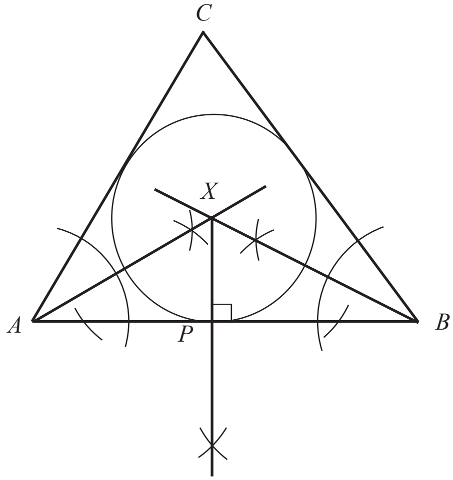
படி 2: கோணங்களின் இருசமகூறாக்கிகள் சந்திக்கும் புள்ளியை X எனப் பெயரிடுக.



படி 3: X இலிருந்து முக்கோணியின் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்திற்குச் செங்குத்தொன்றை அமைக்க. அச்செங்குத்தின் அடியை P எனப் பெயரிடுக.



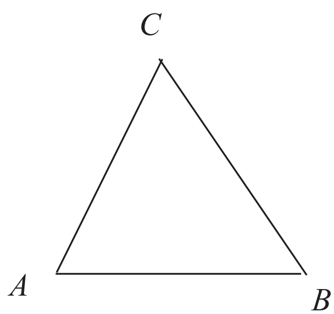
படி 4: X ஐ மையமாகக் கொண்டு XP ஐ ஆரையாகவுடைய வட்டத்தை வரைக.



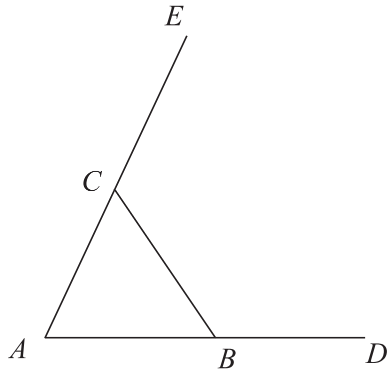
மேலே அமைத்த வட்டமானது முக்கோணியின் உள்ளே AB, BC, AC ஆகிய பக்கங்களைத் தொட்டுக் கொண்டு செல்கின்றதை நீங்கள் காண்பீர்கள். இதற்கேற்ப அவ்வட்டமானது முக்கோணி ABC இன் **உள்வட்டம்** எனப்படும். உள்வட்டத்தின் மையம் **உள்வட்ட மையம்** எனப்படும்.

ஒரு முக்கோணியின் வெளி வட்டத்தை அமைத்தல்

முக்கோணி ABC ஐக் கருதுவோம்.

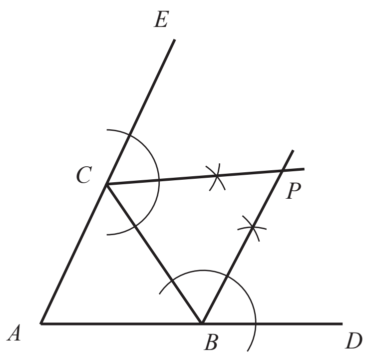


படி 1: பக்கம் AB ஐ D வரைக்கும் பக்கம் AC ஐ E வரைக்கும் நீட்டுக.

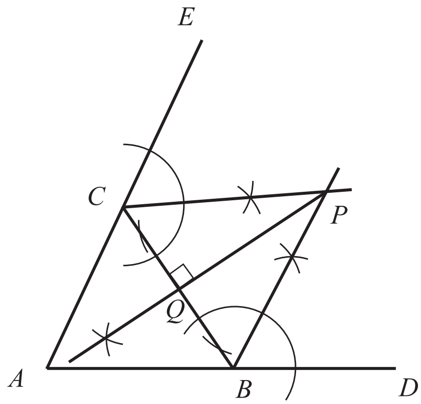


படி 2: கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி $C\hat{B}D$, $B\hat{C}E$ ஆகிய கோணங்களின் இருசம கூறாக்கிகளை அமைக்க.

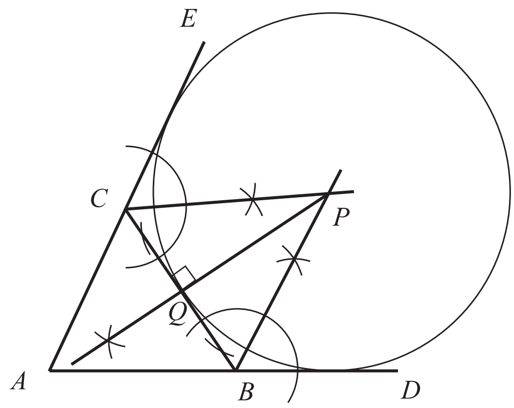
படி 3: கோணங்களின் இருசமகூறாக்கிகள் சந்திக்கும் புள்ளியை P எனப் பெயரிடுக.



படி 4: P இலிருந்து பக்கம் BC இற்கு (அல்லது கோட்டுத் துண்டங்கள் CE அல்லது BD இற்கு) ஒரு செங்குத்து அமைக்க. அச்செங்குத்தின் அடியை Q எனப் பெயரிடுக.



படி 5: P ஐ மையமாகவும் PQ ஐ ஆரையாகவும் உடைய ஒரு வட்டத்தை வரைக.



மேலே அமைத்த வட்டமானது நீட்டப்பட்ட AC, AB ஆகிய பக்கங்களையும் பக்கம் BC யை வெளிப்புறமாகவும் தொட்டுக் கொண்டு செல்கின்றது என்பதைக் காண்பீர்கள். அவ்வட்டமானது முக்கோணி ABC இன் **வெளிவட்டம்** எனப்படும். இவ்வட்டத்தின் மையம் **வெளிவட்ட மையம்** எனப்படும்.

குறிப்பு: மேற்குறித்த முக்கோணியில் நீட்டப்பட்ட CB, CA ஆகிய பக்கங்களைத் தொடும் வெளி வட்டத்தையும் நீட்டப்பட்ட BA, BC ஆகிய பக்கங்களைத் தொடும் வெளிவட்டத்தையும் அமைக்கலாம். இதற்கேற்ப, ஒரு முக்கோணிக்கு மூன்று வெளிவட்டங்கள் உள்ளன என்பதை அறிந்துகொள்க.

பயிற்சி 23.2

1. (i) $AB = 5$ cm, $BC = 4.5$ cm, $AC = 4$ cm ஆகுமாறு முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க.

(ii) BC, AC ஆகிய பக்கங்களின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கிகளை அமைக்க. அவை சந்திக்கும் புள்ளியை O எனப் பெயரிடுக.

(iii) முக்கோணி ABC இன் சுற்றுவட்டத்தை அமைக்க.

2. (i) $PQ = 6$ cm, $P\hat{Q}R = 90^{\circ}$, $QR = 4$ cm ஆகுமாறு முக்கோணி PQR ஐ அமைக்க.

(ii) முக்கோணி PQR இன் சுற்றுவட்டத்தை அமைக்க.

3. (i) $XY = 4.2$ cm, $Y\hat{X}Z = 120^{\circ}$, $X\hat{Y}Z = 30^{\circ}$ ஆகவுள்ள முக்கோணி XYZ ஐ அமைக்க.

(ii) முக்கோணி XYZ இன் சுற்றுவட்டத்தை அமைக்க.

(iii) சுற்று வட்டத்தின் ஆரையை அளந்து எழுதுக.

4. (i) $AB = 7$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 5.5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க.

(ii) $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$ ஆகிய கோணங்களின் கோண இருசமகூறாக்கிகளை அமைக்க.

(iii) கோணங்களின் இருசம கூறாக்கிகள் சந்திக்கும் புள்ளியை P எனப் பெயரிடுக.

(iv) முக்கோணி ABC இன் உள்வட்டத்தை அமைக்க.

5. (i) $KL = 6$ cm, $L\hat{K}M = 105^{o}$, $KM = 9$ cm ஆகுமாறு முக்கோணி KLM ஐ அமைக்க.

(ii) முக்கோணி KLM இன் உள் வட்டத்தை அமைத்து அதன் ஆரையை அளந்து எழுதுக.

6. (i) $CD = 5.5$ cm , $C\hat{D}E = 60^{o}$, $DE = 4$ cm ஆகுமாறு முக்கோணி CDE ஐ அமைக்க.

(ii) $DP = 2.8$ cm ஆகுமாறு பக்கம் CD ஐ P வரையும் $EQ = 2.5$ cm ஆகுமாறு CE ஐ Q வரையும் நீட்டுக.

(iii) $E\hat{D}P$, $D\hat{E}Q$ ஆகிய கோணங்களின் இருசம கூறாக்கிகளை அமைக்க அவை சந்திக்கும் புள்ளியை X எனப் பெயரிடுக.

(iv) X இலிருந்து DE இற்கு ஒரு செங்குத்தை அமைத்து அச்செங்குத்து DE ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியை K எனப் பெயரிடுக.

(v) X ஐ மையமாகக் கொண்டு XK ஐ ஆரையாகவுடைய ஒரு வட்டத்தை அமைக்க.

7. (i) $AB = 6.2$ cm, $A\hat{B}C = 120^{o}$, $BC = 4.5$ cm ஆகவுள்ள இணைகரம் $ABCD$ யை அமைக்க.

(ii) AB, AC ஆகிய பக்கங்களை நீட்டி முக்கோணி ABC இன் வெளி வட்டத்தை அமைக்க.

(iii) வெளிவட்டத்தின் ஆரையை அளந்து எழுதுக.

23.3 ஒரு வட்டத்திற்கான தொடலியை அமைத்தல்

தொடலி தொடர்பான பாடத்தில் கற்ற வட்டத் தொடலிகள் பற்றிய இரண்டு தேற்றங்களை மீண்டும் நினைவுகூர்வோம்.

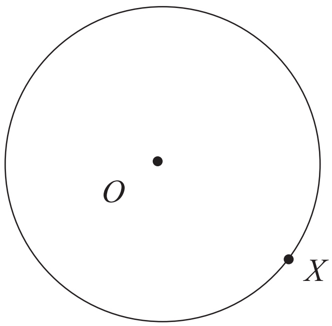
1. ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலுள்ள ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் நேர்கோட்டுத் துண்டம் வட்டத்தின் தொடலி ஆகும்.
2. ஒரு வட்டத்திற்கு புறப் புள்ளியொன்றிலிருந்து வரையப்படும் தொடலிகள் நீளத்தில் சமனானவை ஆகும்.

தற்போது மேற்குறித்த தேற்றங்களைப் பயன்படுத்தி வட்டத் தொடலிகளை அமைக்கும் முறையைக் கற்போம்.

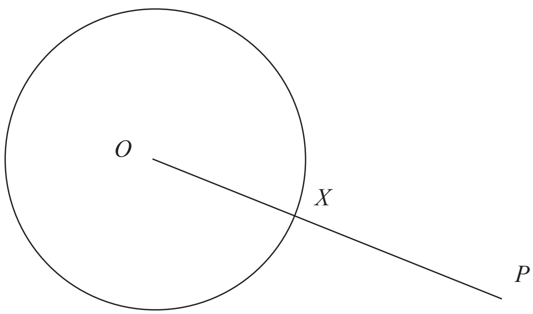
ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒரு தொடலியை அமைத்தல்

இவ்வமைப்புக்காக, ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலுள்ள ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் நேர்கோட்டுத் துண்டம் வட்டத்தின் தொடலி ஆகும் என்னும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

தரப்பட்ட வட்டத்தின் மையம் O எனவும் X எனப்படுவது வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி எனவும் கொள்வோம்.

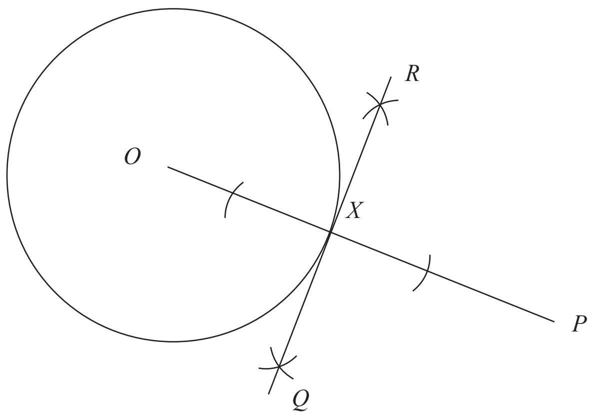


படி 1: OX ஐ இணைத்து அதனை நீட்டுக. நீட்டப்பட்ட OX இல் வட்டத்திற்கு வெளியே புள்ளி P ஐக் குறிக்க.



படி 2: கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி X இல் கோட்டுத் துண்டம் OP இற்கு ஒரு செங்குத்தை அமைக்க. இதற்கு, ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒரு செங்குத்து அமைக்கும் முறை பற்றி நீங்கள் கற்ற விடயங்களைப் பயன்படுத்துக.

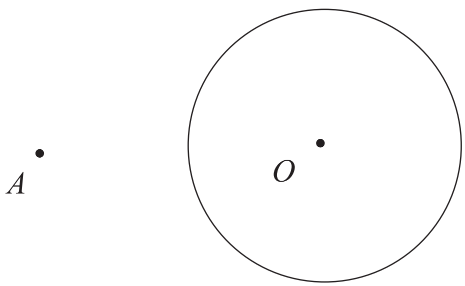
படி 3: அச்செங்குத்தை RQ எனப் பெயரிடுக.



வட்டத்திற்கு X இல் வரைந்த தொடலி RQ ஆகும்.

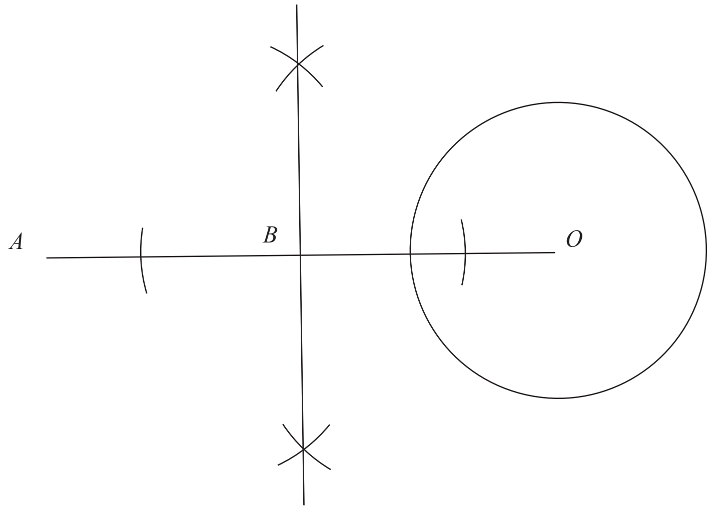
புறப்புள்ளியொன்றிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்குத் தொடலிகளை அமைத்தல்

தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மையம் O எனவும் வட்டத்துக்கு வெளியே அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளி A எனவும் கொள்வோம்.



இவ்வமைப்பைச் செய்வதற்கு "ஒரு வட்டத்தின் புறத்தே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடலிகள் நீளத்தில் சமனானவை" என்னும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

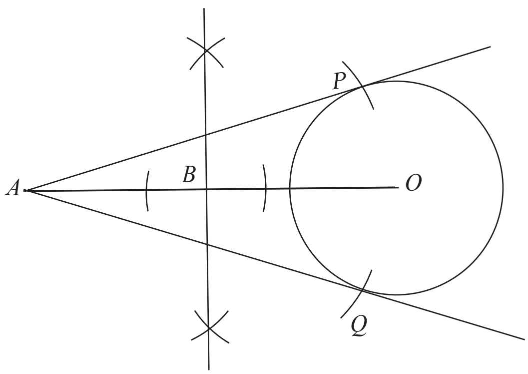
படி 1: கோடு OA ஐ வரைந்து கோட்டுத் துண்டம் OA இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியை அமைத்து அது OA ஐ இடைவெட்டும் புள்ளியை B எனப் பெயரிடுக. இதற்கு ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியை அமைக்கும் முறை பற்றி நீங்கள் கற்ற விடயங்களைப் பயன்படுத்துக.



படி 2: B யை மையமாகக் கொண்டு BO (அல்லது BA) ஆரையுடைய இரண்டு விற்களை வட்டத்தின் மீது வரைக.

படி 3: தரப்பட்டுள்ள வட்டமும் விற்களும் இடைவெட்டும் இரண்டு புள்ளிகளைப் P, Q எனப் பெயரிடுக.

படி 4: AP, AQ ஆகிய கோடுகளை வரைக.



AP, AQ ஆகியவற்றின் மூலம் O வை மையமாகவுடைய வட்டத் தொடலிகள் பெறப்படுகின்றன. பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $A\hat{P}O$, $A\hat{Q}O$ ஆகியவற்றை அளந்து அவை 90^{o} வீதம் உள்ளது என்பதை உறுதிப்படுத்திக் கொள்க.

பயிற்சி 23.3

1. 3 cm ஆரையையுடைய ஒரு வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மீது A என்னும் புள்ளியைக் குறிக்க. A இல் வட்டத்துக்கு ஒரு தொடலியை அமைக்க.

2. (i) 3.5 cm ஆரையுடைய ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மையத்தை O எனப் பெயரிடுக. வட்டத்தின் மீது P என்னும் ஒரு புள்ளியைக் குறித்து P இல் ஒரு தொடலியை அமைக்க.
(ii) தொடலியின் மீது $PQ = 5$ cm ஆகுமாறு புள்ளி Q ஐக் குறிக்க.
(iii) OQ இன் நீளத்தை அளந்து எழுதுக.
(iv) பைதகரசின் தேற்றத்திலிருந்து OQ இன் நீளத்தைக் கணித்து நீங்கள் பெற்ற விடையின் செவ்வைத் தன்மையை ஆராய்க.

3. (i) ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 5 cm ஆகவுள்ள சமபக்க முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க.
(ii) கோடு AB ஐ B இல் தொடுவதும் C யினூடாகச் செல்வதுமான வட்டத்தை அமைக்க.
(iii) அவ்வட்டத்தின் ஆரையை அளந்து எழுதுக.

4. (i) ஆரை 2.8 cm ஆகவும் O வை மையமாகவும் உடைய வட்டத்தை அமைக்க.
(ii) வட்டத்தின் மீது A என்னும் ஒரு புள்ளியைக் குறித்து OA ஐ இணைக்க. நீட்டப்பட்ட OA யின் மீது $OB = 5$ cm ஆகுமாறு புள்ளி B ஐக் குறிக்க.
(iii) B யிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடலிகளை அமைக்க.
(iv) தொடலிகளின் நீளங்களை அளந்து எழுதுக.

5. (i) $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm, $B\hat{A}C = 90^{\circ}$ ஆகுமாறு முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க.
(ii) முக்கோணி ABC இன் சுற்றுவட்டத்தை அமைக்க.
(iii) மேற்குறித்த வட்டத்துக்கு A யிலிருந்து ஒரு தொடலி வரைக.
(iv) A யில் அமைத்த தொடலியும் நீட்டப்பட்ட BC யும் சந்திக்கும் புள்ளியை P எனப் பெயரிடுக.
(v) P யிலிருந்து வட்டதுக்கு வேறொரு தொடலியை அமைக்க.

6. (i) $KL = 9$ cm, $K\hat{L}M = 90^{\circ}$, $LM = 4$ cm ஆகுமாறு முக்கோணி KLM ஐ அமைக்க.
(ii) $K\hat{M}L$ இன் கோண இருசமகூறாக்கியை அமைக்க. அது கோடு KL ஐ சந்திக்கும் புள்ளியை O எனப் பெயரிடுக.
(iii) O வை மையமாகவும் OL ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தை அமைக்க.
(iv) $ML = MT$ ஆகுமாறு புள்ளி T யை KM இன் மீது குறிக்க.
(v) $O\hat{T}M$ இன் பெறுமானம் காண்க.
(vi) K இலிருந்து வட்டதுக்கு வோறொரு தொடலியை அமைக்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. (i) $AB = 6$ cm, $A\hat{B}C = 45^{o}$, $AC = 4$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC யை அமைக்க.

(ii) A யினூடாக BC யிற்குச் சமாந்தரக் கோடொன்றை அமைக்க.

(iii) அச்சமாந்தரக் கோட்டின் மீது மையத்தை உடையதும் A, B ஆகிய புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்வதுமான வட்டத்தை அமைக்க.

2. (i) $PQ = 7$ cm, $P\hat{Q}R = 120^{o}$, $QR = 4.5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி PQR ஐ அமைக்க.

(ii) $PQRS$ ஓர் இணைகரமாகும் வகையில் புள்ளி S ஐக் காண்க.

(iii) மூலைவிட்டம் QS ஐ வரைக.

(iv) முக்கோணி PQS இன் சுற்றுவட்டத்தை அமைக்க.

(v) முக்கோணி QRS இன் உள்வட்டத்தை அமைக்க.

3. $PQ = 4.8$ cm $P\hat{Q}R = 90^{o}$, $QR = 6.5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி PQR ஐ அமைக்க. பக்கம் PQ வை P இல் தொட்டுக்கொண்டு பக்கம் QR ஐயும் தொடும் ஒரு வட்டத்தை வரைக.

24 தொடைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- மூன்று தொடைகள் காட்டப்பட்டுள்ள ஒரு வென் வரிப்படத்துக்குரிய தொடைப் பிரதேசங்களை இனங்காண்பதற்கும்
- அப்பிரதேசங்களைத் தொடைக் குறிப்பீட்டில் காட்டுவதற்கும்
- மூன்று தொடைகளைக் கொண்டு வகைகுறிக்கத்தக்க பிரசினங்களை வென் வரிப்படங்களைப் பயன்படுத்தித் தீர்ப்பதற்கும்

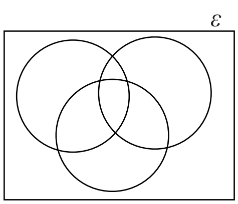
தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

வென் வரிப்படங்கள்

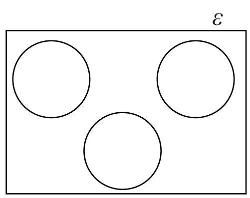
இரு தொடைகள் காட்டப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படங்களுக்குரிய பிரதேசங்களை இனங்காண்பதையும் வென் வரிப்படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள ஒரு பிரதேசத்தினால் வகைகுறிக்கப்படும் தொடைகளைத் தொடைக் குறிப்பீட்டில் எழுதிக் காட்டுவதையும் பற்றி நீங்கள் தரம் 10 இல் கற்றுள்ளீர்கள். மூன்று தொடைகளையும் ஒரு வென் வரிப்படத்தில் வகைகுறிக்கலாம். இதற்கேற்ப ஒரு வென் வரிப்படத்தில் மூன்று தொடைகள் வகைகுறிக்கப்படும் விதம் பற்றி ஆராய்வோம்.

A, B, C என்பன வெறும் தொடை அல்லாத மூன்று தொடைகளெனின், அத்தொடைகள் ஒரு வென் வரிப்படத்தில் இருக்கத்தக்க சில சந்தர்ப்பங்கள் கீழே காணப்படுகின்றன.

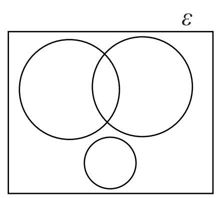
(i)



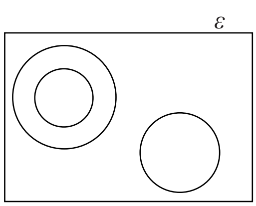
(ii)



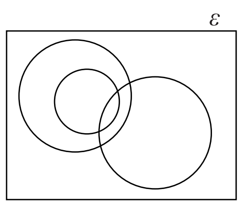
(iii)



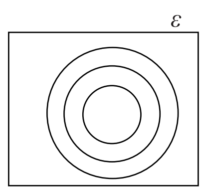
(iv)



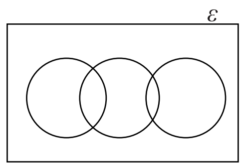
(v)



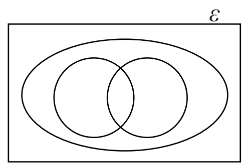
(vi)



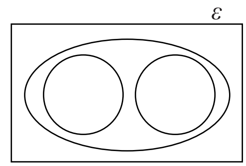
(vii)



(viii)

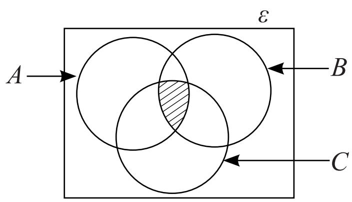


(ix)

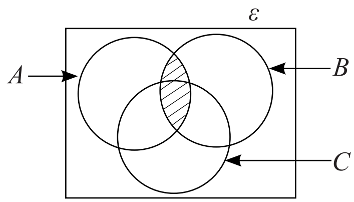


24.1 வென் வரிப்படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள பிரதேசத்தினால் வகைகுறிக்கப்படும் தொடைகளைத் தொடைக் குறிப்பீட்டினால் காட்டல்

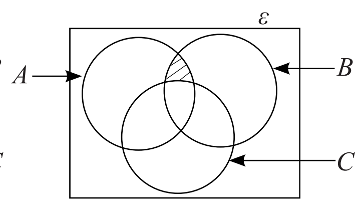
A, B, C என்பன வெறும் தொடை அல்லாத மூன்று தொடைகளாக இருக்கும்போது அவற்றை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் காட்டி அதில் குறிக்கப்பட்டுள்ள பிரதேசங்களின் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும் தொடைகளைத் தொடைக் குறிப்பீட்டில் காட்டுவோம். இதற்காகத் தொடைகளின் ஒன்றிப்பு, தொடைகளின் இடைவெட்டு, நிரப்பித் தொடை ஆகியன பயன்படுத்தப்படும்.



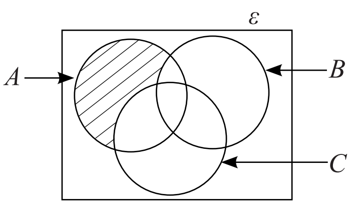
$A \cap B \cap C$



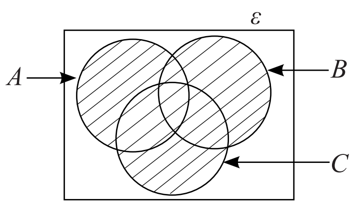
$A \cap B$



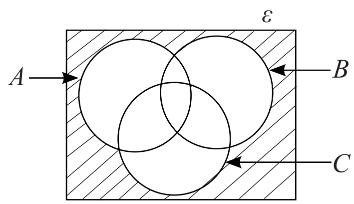
$(A \cap B) \cap C'$



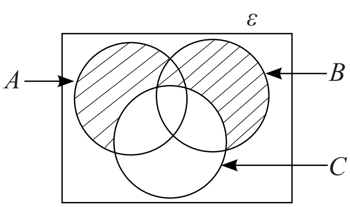
$A \cap (B \cup C)'$



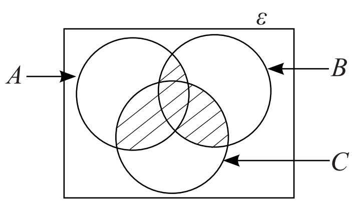
$A \cup B \cup C$



$(A \cup B \cup C)'$



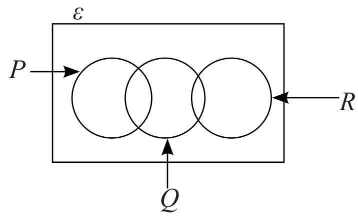
$(A \cup B) \cap C'$



$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

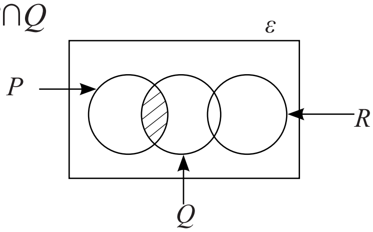
உதாரணம் 1

இவ்வென் வரிப்படத்திற்கேற்பப் பின்வரும் குறிப்பீடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் காட்டப்பட்டுள்ள தொடைகளில் வகைகுறிக்கப்படும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

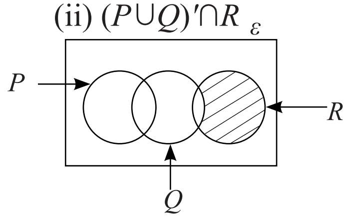


(i) $P \cap Q$ (ii) $(P \cup Q)' \cap R$ (iii) $(P \cup R)' \cap Q$ (iv) $(P \cup Q \cup R)'$

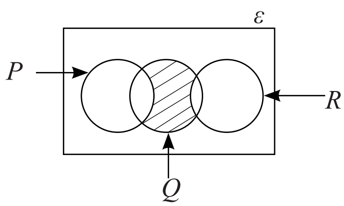
(i) $P \cap Q$



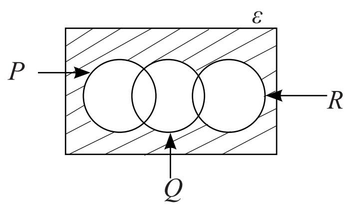
(ii) $(P \cup Q)' \cap R$



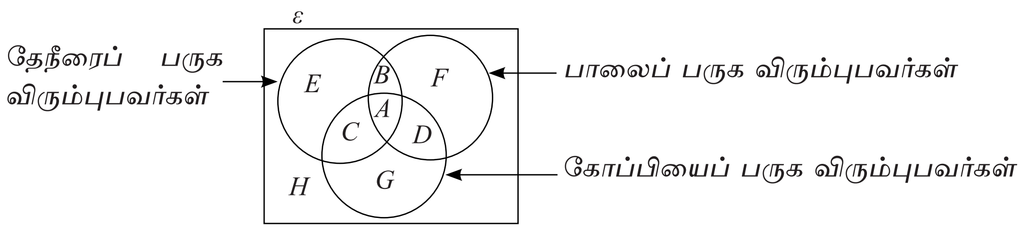
(iii) $(P \cup R)' \cap Q$



(iv) $(P \cup Q \cup R)'$



மாணவர் குழு ஒன்று விரும்பும் ஒரு பானம் பற்றிய தகவல்கள் பின்வரும் வென் வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.



மேற்குறித்த வென் வரிப்படத்தைக் கொண்டு ஒவ்வோர் ஆங்கில எழுத்தினாலும் வகைகுறிப்படும் பிரதேசங்கள் உரித்தாவன,

A - தேநீர், கோப்பி, பால் ஆகிய மூன்று வகைகளையும் பருக விரும்புபவர்கள்.

B - தேநீர், பால் ஆகியவற்றை மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள் (தேநீர், பால் ஆகியவற்றை பருக விரும்பும், ஆனால் கோப்பியை பருக விரும்பாதவர்கள்)

C - தேநீரையும் கோப்பியையும் மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள்.

D - பால், கோப்பி ஆகியவற்றை மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள்.

E - தேநீரை மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள்.
F - பாலை மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள்.
G - கோப்பியை மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள்.
H - மேற்குறித்த மூன்று பானங்களில் எவற்றையும் பருக விரும்பாதவர்கள்.

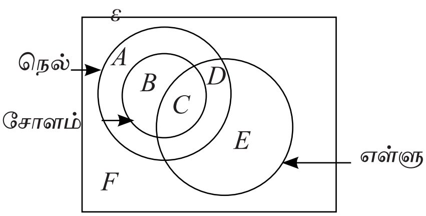
மேலும் மேற்குறித்த பிரதேசங்கள் சிலவற்றை சேர்ந்து எடுக்கும்போது அப்பிரதேசங்களின் மூலம் காட்டப்படும் சில தொடைகளை விபரிப்போம்.

A யும் B யும் – தேநீர், பால் ஆகிவற்றை பருக விரும்புபவர்கள்
B யும் C யும் D யும் – மேற்குறித்தவற்றில் இரு பானங்களை மாத்திரம் பருக விரும்புபவர்கள்
A யும் B யும்C யும் D யும் – மேற்குறித்த பானங்களில் குறைந்தது இரண்டையேனும் பருக விரும்புபவர்கள்
A யும் B யும் C யும் E யும் – தேநீரைப் பருக விரும்புபவர்கள்.
E யும் F வும் G யும் – இவற்றில் ஏதாவது ஒன்றை மட்டும் பருக விரும்புபவர்கள்.

உதாரணம் 2

விவசாயிகள் குழு ஒன்று பயிரிட்ட பயிர்கள் பற்றிய தகவல்கள் பின்வரும் வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன. அதில் ஆங்கில எழுத்துக்களின் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும் பிரதேசங்களின் மூலம் காட்டப்படும் தொடைகளைச் சொற்களில் விபரிக்க. அத்துடன் கீழே காட்டப்பட்டுள்ள தொடைப் பிரிவுகளை விபரிக்க.

(i) B யும் C யும்
(ii) C யும் D யும்
(iii) A யும் D யும் E யும்



A - நெல்லை மாத்திரம் பயிரிடும் விவசாயிகள்
B - நெல், சோளம் ஆகியவற்றை மாத்திரம் பயிரிடும் விவசாயிகள்
C - நெல், சோளம், எள்ளு ஆகிய மூன்றையும் பயிரிடும் விவசாயிகள்
D - நெல், எள்ளு ஆகியவற்றை மாத்திரம் பயிரிடும் விவசாயிகள்
E - எள்ளை மாத்திரம் பயிரிடும் விவசாயிகள்
F - மேற்குறித்த மூன்று பயிர்களில் எவற்றையும் பயிரிடாத விவசாயிகள்.

அத்தடன்

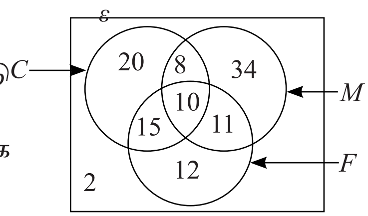
(i) B யும் C யும் - சோளத்தை பயிரிடும் விவசாயிகள்
(ii) C யும் D யும் - நெல்லையும் எள்ளையும் பயிரிடுவோர்கள்
(iii) A யும் D யும் E யும் - சோளம் தவிர்ந்த குறைந்தது ஒரு பயிரையாவது பயிரிடுபவர்கள்

உதாரணம் 3

ε = {வீடமைப்புத் திட்டம் ஒன்றில் உள்ள வீடுகள்}
C = {கார்கள் உள்ள வீடுகள் }
M = {மோட்டார் சைக்கிள்கள் உள்ள வீடுகள்}
F = {சைக்கிள்கள் உள்ள வீடுகள்}

மேற்குறித்த தொடைகள் பின்வரும் வென் வரிப்படத்தில் வகைகுறிக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு பிரதேசத்தினாலும் வகைகுறிக்கப்படும் தொடைகளின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கைகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

இவ்வீடமைப்புத் திட்டத்தில்,



(i) கார் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது ?
(ii) மோட்டார் சைக்கிள் **மாத்திரம்** இருக்கும் வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது ?
(iii) சைக்கிள்கள் இல்லாத வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது ?
(iv) இரு வகை வாகனங்கள் மாத்திரம் இருக்கும் வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது ?
(v) இரு வகை வாகனங்களேனும் இருக்கும் வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது ?
(vi) ஒரு வகை வாகனம் மாத்திரம் இருக்கும் வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது ?

விடைகள்

(i) கார்கள் உள்ள வீடுகள் தொடை C யினால் குறித்துக் காட்டப்பட்டுள்ளது. ஆகவே C யில் உள்ள மூலகங்களின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் காண்பதன்மூலம் கார் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காணலாம்.
$\therefore$ கார் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை $= 20 + 8 + 10 + 15 = 53$.

(ii) மோட்டார் சைக்கிள் உள்ள வீடுகள் தொடை M இனால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. மோட்டார் சைக்கிள் **மாத்திரம்** உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்பதற்கு மோட்டார் சைக்கிள்களுடன் கார்கள் அடங்கும் பகுதியையும் சைக்கிள்கள் உள்ள பகுதியையும் தவிர்க்க வேண்டும். எனவே
$\therefore$ மோட்டார் சைக்கிள்கள் மட்டும் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை $= 34$

(iii) சைக்கிள்கள் இல்லாத வீடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்பதற்கு சைக்கிள்கள் உள்ள வீட்டைக் குறிக்கும் தொடை F இற்குரிய பகுதி தவிர்ந்த பகுதியில் உள்ள வீடுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் காண வேண்டும்.
$\therefore$ சைக்கிள்கள் இல்லாத வீடுகளின் எண்ணிக்கை $= 20 + 8 + 34 + 2 = 64$.

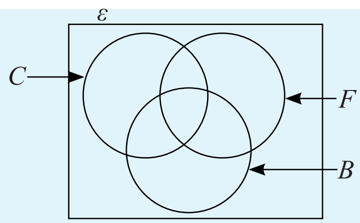
(iv) இரண்டு வகை வாகனங்கள் மட்டும் உள்ள பகுதிகளை காரும் மோட்டார் சைக்கிளும் சைக்கிளும் மோட்டார் சைக்கிளும் மாத்திரம் உள்ள பகுதிகளைக் கூட்ட வேண்டும்.
∴ இரண்டு வாகனங்கள் மாத்திரம் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை $15 + 8 + 11 = 34$.

(v) இருவகை வாகனங்களேனும் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை காண மேலே (iv) பெற்ற விடையுடன் மூன்று வாகனங்களும் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கையைக் கூட்ட வேண்டும். $34 + 10 = 44$.

(vi) ஒரு வகை வாகனம் மட்டும் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காணத் தனித்தனியே ஒரு வாகனம் உள்ள பகுதிகளைக் கூட்டுவோம். $20 + 34 + 12 = 66$.

பயிற்சி 24.1

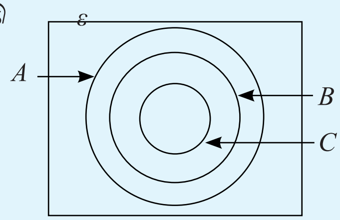
1. ஒரு பாடசாலையில் இருக்கும் மாணவர் குழு ஒன்றிடம் அவர்கள் விரும்பும் விளையாட்டுக்கள் தொடர்பில் பெற்ற தகவல்கள் பின்வரும் வென் வரிப் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.



C = {கிறிக்கெற்றை விளையாட விரும்பும் மாணவர்கள்}
F = {உதைப்பந்தை விளையாட விரும்பும் மாணவர்கள்}
B = {கூடைப் பந்தாட்டத்தை விளையாட விரும்பும் மாணவர்கள்}

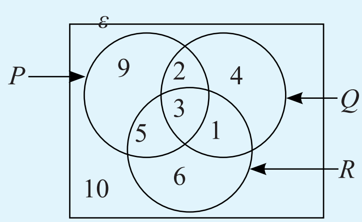
இவ்வென் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் குறிப்பீடுகள் ஒவ்வொன்றினாலும் காட்டப்பட்டுள்ள தொடைகளை வகைகுறிக்கும் பிரதேசத்தை நிழற்றிக் காட்டி அவற்றைச் சொற்களில் விபரித்து எழுதுக.
(i) $B \cap C \cap F$ (ii) $(C \cap F) \cap B'$ (iii) $(B \cup C)' \cap F$ (iv) $(B \cup C \cup F)'$

2. இவ்வென் வரிப்படத்தின் மாதிரியைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் குறிப்பீடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் காட்டப்படும் தொடைப் பிரதேசங்களை தரப்பட்டுள்ள வென்வரிப்படத்தில் குறித்துக் காட்டுக.



(i) $A \cap B \cap C$ (ii) $B \cap C'$ (iii) $A \cap (B \cup C)'$
(iv) $(A \cup B \cup C)'$

3. இவ்வென் வரிப்படத்திற்கேற்பப் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.



(i) $n\ (P \cap Q \cap R)$ (ii) $n\ (Q \cup R)'$
(iv) $n\ [(P \cap Q) \cap R')]$ (iv) $n\ [(Q \cup R)' \cap P]$
(v) $n\ (P \cup Q \cup R)'$

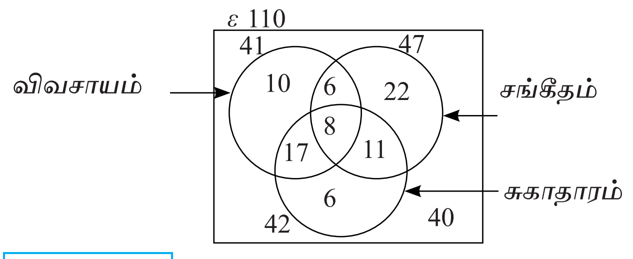
24.2 தொடைகள் தொடர்பான பிரசினங்கள் (மேலும்)

தொடைகள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் எவ்வாறு தீர்ப்பது என்பதைச் சில உதாரணங்களின் மூலம் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

120 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவில் 41 மாணவர்கள் விவசாயத்தையும் 47 மாணவர்கள் சங்கீதத்தையும் 42 மாணவர்கள் சுகாதாரத்தையும் கற்கின்றனர். 14 மாணவர்கள் விவசாயத்தையும் சங்கீதத்தையும் 19 மாணவர்கள் சங்கீதத்தையும் சுகாதாரத்தையும் 25 மாணவர்கள் விவசாயத்தையும் சுகாதாரத்தையும் 8 மாணவர்கள் மூன்று பாடங்களையும் கற்கின்றனர். இத்தகவல்களை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் காட்டிப் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) விவசாயத்தை மாத்திரம் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
(ii) ஒரு பாடத்தை மாத்திரம் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
(iii) இரு பாடங்களையேனும் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
(iv) ஒரு பாடத்தையேனும் கற்காத மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

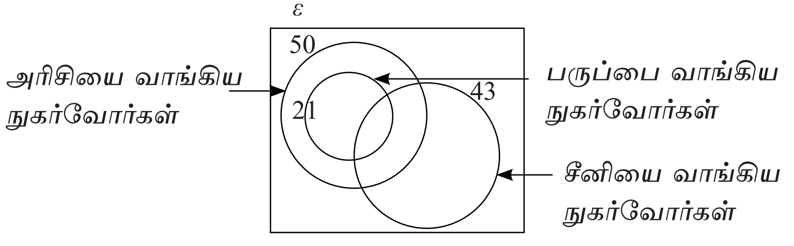


(i) 10
(ii) 10 + 22 + 6 = 38
(iii) 17 + 6 + 11 + 8 = 42
(iv) 40

உதாரணம் 2

ஒரு குறித்த நாளில் ஒரு மணித்தியாலத்தில் ஒரு கடைக்கு வந்த நுகர்வோர்கள் தொடர்பாகச் சேகரிக்கப்பட்ட தகவல்களுக்கேற்ப 50 நுகர்வோர்கள் அரிசியையும் 21 நுகர்வோர்கள் பருப்பையும் 43 நுகர்வோர்கள் சீனியையும் வாங்கியுள்ளனர்.

மேலும் பருப்பை வாங்கிய எல்லோரும் அரிசியையும் வாங்கினர் எனின் இத்தகவல்கள் கீழே ஒரு வென் வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.



(i) 23 நுகர்வோர்கள் அரிசியையும் சீனியையும் வாங்கினர். சீனியை மாத்திரம் வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

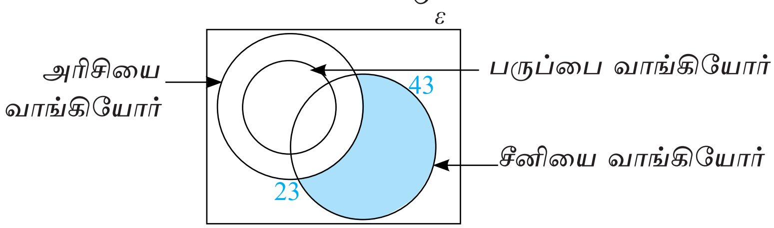
(ii) 12 நுகர்வோர்கள் மூன்று வகைப் பொருள்களையும் வாங்கினர் எனின் அரிசி, பருப்பு ஆகிய இரு வகைப் பொருள்களை மாத்திரம் வாங்கிய நுகர்வோர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(iii) அரிசியை மாத்திரம் வாங்கிய நுகர்வோர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(iv) அம்மணித்தியாலத்தில் வந்த நுகர்வோர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 90 எனின், வேறு பொருள்களை வாங்குவதற்கு வந்த நுகர்வோர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

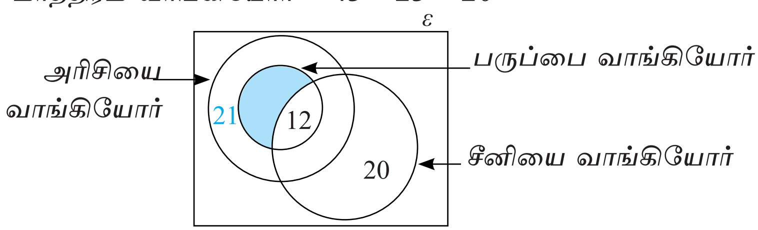
தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப ஒவ்வொரு தொடைப் பிரதேசங்களுக்குரிய மூலகங்களின் எண்ணிக்கையைக் காணவேண்டும்.

(i)



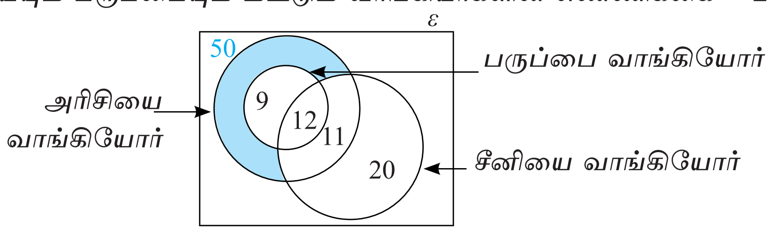
சீனியை மாத்திரம் வாங்கியோர் = 43 – 23 = 20

(ii)



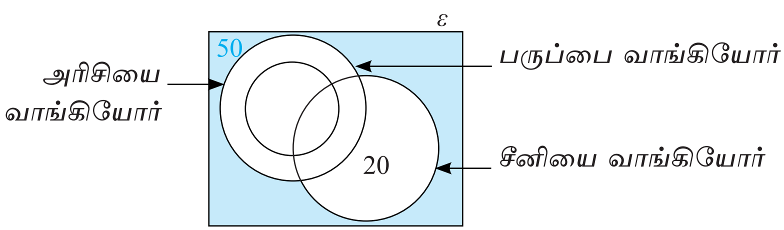
அரிசியையும் பருப்பையும் மட்டும் வாங்கியர்களின் எண்ணிக்கை = 21 – 12 = 9

(iii)



அரிசியை மாத்திரம் வாங்கியர்களின் எண்ணிக்கை = 50 – 9 – 12 – 11 = 18

(iv)



மேலே குறிப்பிடப்படாத வேறு பொருள்களை வாங்காதவர்களின் எண்ணிக்கை = 90 – 70 = 20

பயிற்சி 24.2

1. பாடசாலைக் காகிதாதிகள் விற்கப்படும் ஒரு கடைக்கு வருகைதந்த 20 பேர் பொருள்களை வாங்கிய விதம் பின்வருமாறாகும். 8 பேர் பென்சில்களையும் 11 பேர் பேனாக்களையும் 13 பேர் புத்தகங்களையும் வாங்கிய அதேவேளை பென்சில்களையும் புத்தகங்களை வாங்கிய 6 பேரில் 4 பேர் பேனாக்களை வாங்கவில்லை. 3 பேர் பேனா, பென்சில் ஆகிய இருவகைகளையும் வாங்கினர். 3 பேர் பேனாவை மாத்திரம் வாங்கினர். வென் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி இவற்றைக் காண்க.

(i) மேற்குறித்த பொருள்கள் எதனையும் வாங்காதவர்கள் எத்தனை பேர்?

(ii) பேனாவைவாங்காதவர்கள் எத்தனை பேர்?

(iii) கடைக்கு வந்தவர்களில் என்ன சதவீதம் இப்பொருள்களில் குறைந்தது இரு வகைகளையும் வாங்கினர்?

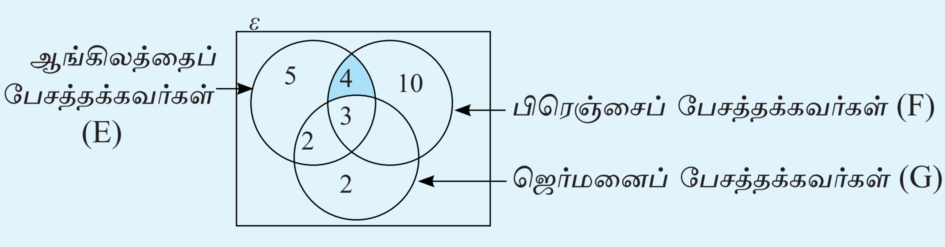
2. A, B, C என்னும் செய்தித் தாள்களை வாங்கல் தொடர்பாக ஒரு கிராமத்தில் மேற்கொள்ளப்பட்ட ஒரு கணிப்பீட்டில் பின்வரும் தகவல்கள் கிடைத்தன. 50% ஆனோர் செய்தித்தாள் A யையும் 67% ஆனோர் செய்தித்தாள் B யையும் 55% ஆனோர் செய்தித்தாள் C யையும் வாங்குகின்றனர். 10% ஆனோர் A, B ஆகிய செய்திதாள்களை மட்டும் வாங்குகின்றனர். 15% ஆனோர் செய்தித்தாள் A மாத்திரம் வாங்குகின்றனர். 5% ஆனோர் A, C ஆகிய செய்தித்தாள்களை வாங்குகின்றபோதிலும் செய்தித்தாள் B யை வாங்குவதில்லை. 17% ஆனோர் செய்தித்தாள் A யை வாங்காத போதிலும் B, C ஆகிய செய்தித்தாள்களை வாங்குகின்றனர். ஒரு வென் வரிப்படத்தின் மூலம் இவற்றைக் காண்க.

(i) மூன்று வகைச் செய்தித்தாள்களையும் வாங்குபவர்களின் சதவீதம் யாது?

(ii) செய்தித்தாள் A யை வாங்காத போதிலும் செய்தித்தாள் C யை வாங்குபவர்களின் சதவீதம் யாது?

(iii) இரு செய்தித்தாள்களை மாத்திரம் வாங்குபவர்களின் சதவீதம் யாது?

3. சீகிரியாவைப் பார்ப்பதற்கு வந்த வெளிநாட்டு உல்லாசப் பயணிகளின் குழு ஒன்று பேசத்தக்க மொழிகள் தொடர்பாக ஒரு பிரசுரத்தில் குறிப்பிடப்பட்ட தகவல்களைக் கொண்டு பின்வரும் வென் வரிப்படம் வரையப்பட்டுள்ளது.



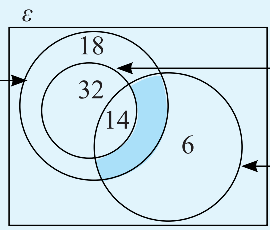
(i) தகவல் வழிகாட்டி ஆங்கிலத்தை மாத்திரம் பேசினால் அதற்குப் பதிலளிக்கத்தக்க அதனை விளங்கிக்கொள்ளத்தக்கவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(ii) ஜெர்மனைப் பேசத்தக்கவர்களின் எண்ணிக்கை 12 எனின், பிரெஞ்சையும் ஜெர்மனையும் மாத்திரம் பேசத்தக்கவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(iii) உருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசத்தினால் வகைகுறிக்கும் உல்லாசப் பயணிகளின் மொழி ஆற்றல் பற்றிச் சொற்களில் விவரிக்க. அதனைத் தொடைக் குறிப்பீட்டின் மூலம் எடுத்துரைக்க.

(iv) ஆங்கிலத்தைப் பேசத்தக்க எல்லோரும் ஆங்கில வழிகாட்டியுடனும் ஏனையோர் தமது மொழி ஆற்றலுக்கேற்பத் ஜெர்மன், பிரெஞ்சு ஆகிய இரு மொழிகளையும் பேசத்தக்க வழிகாட்டியிடமும் ஒப்படைக்கப்பட்டனர். இரண்டாமவரிடம் எத்தனை பேர் ஒப்படைக்கப்பட்டனர்.

4. ஒரு குறித்த பாடசாலையில் விளையாட்டுப் பயிற்சியைப் பெறும் மாணவர்கள் ஒவ்வொருவரும் கிறிக்கெற்று, உதைப்பந்தாட்டம், கரப்பந்தாட்டம் ஆகிய விளையாட்டுக்களில் ஒன்றில் அல்லது பலவற்றில் பங்குபற்றினர். அவர்கள் பற்றிய தகவல்கள் வென்வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.



(i) இம்மூன்று விளையாட்டையும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

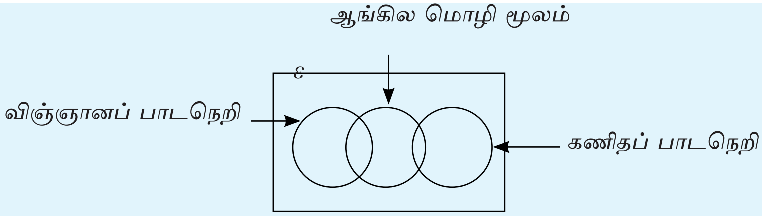
(ii) கிறிக்கெற்றில் மாத்திரம் பங்குபற்றும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(iii) நிழற்றப்பட்ட பிரதேசத்தினால் எவ்விளையாட்டை விளையாடும் மாணவர்கள் காட்டப்படுகின்றனர் எனக் குறிப்பிட்டு அதனைத் தொடைக் குறிப்பீட்டில் காட்டுக.

(iv) கரப்பந்தாட்டத்தை விளையாடும் மாணவர்கள் 25 பேர் எனின் நிழற்றப்பட்ட பிரதேசத்துக்குரிய விளையாட்டு வீரர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

5. ஆசிரியர்களைப் பயிற்றுவிக்கும் ஒரு கல்விக் கல்லூரிக்காக ஓர் ஆண்டில் 400 மாணவர்கள் சேர்த்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளனர். அதில் கணிதத்திற்காக தமிழ், ஆங்கில மொழிமூலப் பாடநெறிகளும் விஞ்ஞானத்திற்காக தமிழ், ஆங்கில மொழிமூலப் பாட நெறிகளும் உடற்கல்விக்காகச் தமிழ், ஆங்கில மொழிமூலப் பாடநெறிகளும் நடைபெறுகின்றன.

(அ) தரப்பட்டுள்ள வென்வரிப்படத்தில் பின்வரும் தகவல்களை உரிய இடங்களில் குறித்து வென் வரிப்படத்தைப் பூரணப்படுத்துக.



(a) விஞ்ஞானப் படநெறியைக் கற்கும் 140 மாணவர்கள் இருக்கும் அதே வேளை அவற்றில் 100 மாணவர்கள் தமிழ் மொழிமூலப் பாடநெறியைக் கற்கின்றனர்

(b) 40 மாணவர்கள் ஆங்கில மொழிமூலக் கணிதப் பாடநெறியைக் கற்கின்றனர்.

(c) 110 மாணவர்கள் ஆங்கில மொழிமூலப் பாடநெறிகளைக் கற்கின்றனர்.

(d) கணிதப் பாடநெறியைக் கற்கும் மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 175 ஆகும்.

(ஆ)

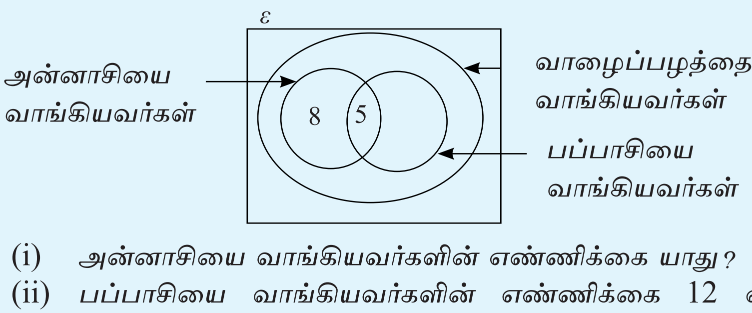
(i) ஆங்கில மொழிமூலம் உடற்கல்விப் பாடநெறியைக் கற்கும் மாணவர்கள் எண்ணிக்கை யாது ?

(ii) ஆங்கில மொழிமூலம் விஞ்ஞானப் பாடநெறியைக் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(iii) தமிழ் மொழிமூலக் கணிதப் பாடநெறியைக் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(iv) சேர்க்கப்பட்ட மாணவர்களில் ஒருவரை எழுமாறாகத் தெரிந்தால் அவர் தமிழ் மொழிமூல உடற்கல்விப் பாடநெறியைக் கற்கும் மாணவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

6. ஒரு நாள் ஒரு பழக்கடைக்குப் பழங்களை வாங்க வந்த ஒரு குழு வாங்கிய பழங்களின் வகைகள் பற்றிய தகவல்கள் பின்வரும் வென் வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன. அன்று அன்னாசியை அல்லது பப்பாசியை வாங்கிய எல்லோரும் வாழைப்பழத்தையும் வாங்கினர்.



(i) அன்னாசியை வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(ii) பப்பாசியை வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை 12 எனின், பப்பாசியை மாத்திரம் வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(iii) வாழைப்பழங்களை வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை 40 எனின், வாழைப்பழங்களை மாத்திரம் வாங்கியவர்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

(iv) மேலே குறிப்பிட்ட பொருள் எதனையும் வாங்காதவர்களின் எண்ணிக்கை 10 எனின், அத்தினத்தில் பழங்களை வாங்குவதற்கு வந்தவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(v) பழக்கடைக்கு வந்தவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கையில் எத்தனை பேர் இரு வகைப் பழங்களை மாத்திரம் வாங்கினர்?

(vi) பழக்கடைக்கு வந்தவர்களில் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த ஒருவர் மூன்று வகைப் பழங்களையும் வாங்கியவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

25 நிகழ்தகவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனை இரு படிமுறைகளைக் கொண்டிருக்கும்போது கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் தொடர்பான ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்கு
  (i) நெய்யரி
  (ii) மரவரிப் படம்
  ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்துவதற்குத்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

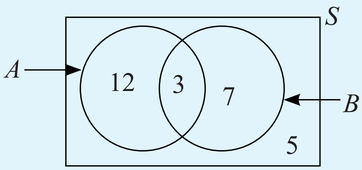
தரம் 10 இல் நீங்கள் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. சமதகவுள்ள பேறுகள் இடம்பெறும் ஒரு மாதிரிவெளி S இல் உள்ள நிகழ்ச்சி A ஆகும். $n(A) = 23$, $n(S) = 50$ எனின்,
   (i) $P(A)$
   (ii) $P(A')$ ஐக் காண்க.

2. ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளி S ஆனது $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ஆகும். இங்கு ஒவ்வொரு பேறும் சமதகவுள்ளதெனின், பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடை தருக.
   (i) A ஆனது S இல் உள்ள ஓர் எளிய நிகழ்ச்சியாகும். A எடுக்கத்தக்க எல்லா நிகழ்ச்சிகளையும் எழுதுக.
   (ii) அந்நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் $P(A)$ ஐக் காண்க.
   (iii) B ஆனது S இல் உள்ள 4 மூலகங்கள் இடம்பெறும் ஒரு கூட்டு நிகழ்ச்சியாகும். B இற்கு ஓர் உதாரணத்தை எழுதுக.
   (iv) $P(B)$, $P(B')$ ஆகியவற்றைக் காண்க.
   (v) அதிலிருந்து $P(B) + P(B') = 1$ என்னும் தொடர்புடைமையை வாய்ப்புப் பார்க்க.
   (vi) X ஆனது வேறொரு மாதிரி வெளியில் $P(X) = 0.7$ ஆகவுள்ள ஓர் நிகழ்ச்சியாகும். $P(X')$ ஐக் காண்க.

3. ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளி S இல் உள்ள A, B என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளின் ஒவ்வொரு பிரதேசத்திற்கும் உரிய மூலக எண்ணிக்கைகள் பின்வரும் வென் வரிப்படத்தில் காணப்படுகின்றன. இதனைக் கொண்டு பின்வருவனவற்றைக் காண்க.



(i) $n(S)$ (ii) $P(A)$ (iii) $P(B)$
(iv) $P(A \cap B)$ (v) $P(A \cup B)$ (vi) $P(A \cap B')$
(vii) $P(A' \cap B)$ (viii) $P(A \cup B)'$

4. 1 தொடக்கம் 3 வரைக்கும் இலக்கம் இடப்பட்ட சம அளவுள்ள மூன்று அட்டைகளிடையே ஒன்றை எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்து அதன் இலக்கம் ஒற்றையா, இரட்டையா எனச் சோதித்து, அது திரும்பவும் இடப்படுகின்றது. அதன் பின்னர் வேறோர் அட்டை எழுமாற்றாக எடுக்கப்பட்டு அதன் இலக்கம் ஒற்றையா, இரட்டையா எனச் சோதிக்கப்படுகின்றது.

(i) மாதிரிவெளி S எனின் அதனை ஒரு தொடையாக எழுதி $n(S)$ ஐக் காண்க.
(ii) A யானது இரு தடவைகளிலும் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி எனின், A யை ஒரு தொடையாக எழுதி $n(A)$ ஐக் காண்க.
(iii) இதிலிருந்து $P(A)$ ஐக் காண்க.
(iv) மேற்குறித்த மாதிரி வெளி S ஐ ஒரு நெய்யரியில் (தெக்காட்டின் தளத்தில்) வகைகுறிக்க.
(v) B ஆனது ஒரு தடவை மாத்திரம் ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி எனின் உரிய புள்ளிகளை அடைப்பினுள் காட்டி $P(B)$ஐக் காண்க.
(vi) மேற்குறித்த மாதிரி வெளி S ஐ மர வரிப்படத்தில் காட்டி அதிலிருந்து குறைந்தபட்சம் ஒரு தடவையேனும் ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

25.1 சாரா நிகழ்ச்சிகளும் சார் நிகழ்ச்சிகளும்

(i) சாரா நிகழ்ச்சிகள்

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுகின்றமை அல்லது நடைபெறாமை வேறொரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுகின்றமையில் அல்லது நடைபெறாமையில் தாக்கம் செலுத்தா விட்டால், இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் **சாரா நிகழ்ச்சிகள்** என நாம் தரம் 10 இல் கற்றோம். A, B ஆகிய இரண்டும் சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனின் $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$ என நாம் அறிவோம். இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் ஓர் உதாரணம் கீழே காணப்படுகின்றது.

இரு நாணயங்களை ஒரே தடவை மேலே எறிந்து அவை விழும் பக்கத்தைச் சோதிப்பதற்கான எழுமாற்றுப் பரிசோதனையைக் கருதுவோம். ஒரு நாணயம் விழும் பக்கம் மற்றைய நாணயத்தின் ஒரு குறித்த பக்கம் கிடைப்பதில் தாக்கம் செலுத்துவதில்லை. ஆகவே ஒரு நாணயத்தின் நிகழ்ச்சி மற்றைய நாணயத்தின் நிகழ்ச்சியைச் சாராதது.

(ii) சார் நிகழ்ச்சிகள்

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுகின்றமை அல்லது நடைபெறாமை வேறொரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுகின்றமையை அல்லது நடைபெறாமையில் தாக்கம் செலுத்துமெனின், அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் **சார் நிகழ்ச்சிகள்** ஆகும். அதாவது ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுகின்றமை அல்லது நடைபெறாமை மீது மற்றைய நிகழ்ச்சியின் நடைபெறுகின்றமையின் அல்லது நடைபெறாமையின் நிகழ்தகவில் மாற்றத்தை உண்டாக்குகின்றது.

பின்வரும் உதாரணங்களைக் கற்பதன் மூலம் சார் நிகழ்ச்சிகள் தொடர்பாக விளங்கிக் கொள்ளலாம்.

a. ஒரு கிறிக்கெற் குழுவில் திறமையான பந்துவீச்சாளர் போட்டியில் பங்குபற்றுகின்றமை, பங்குபற்றாமை அக்குழு வெற்றியீட்டுவதற்கான நிகழ்தகவில் மாற்றத்தை ஏற்படுத்துகின்றது. ஆகவே திறமையான பந்து வீச்சாளர் போட்டிக்கு முன்வருகின்றமை போட்டியில் பங்குபற்றுகின்றமை என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளும் சார் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

b. எருதுகள், பசுக்கள் இருக்கும் மாட்டுப் பண்ணையிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு மாட்டைத் தெரிந்தெடுத்தால், அது பசுவாக இருந்தால் பாலைப் பெறத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை அது எருதுவாக இருந்தால் பாலைப் பெற முடியாது. ஆகவே தெரிந்தெடுத்த மாடு பசுவாக இருத்தல் பசுவிலிருந்து பாலைப் பெறத்தக்கதாக இருத்தல் ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் சார் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

c. ஒரு பையில் ஒரே அளவுள்ள 7 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பந்தை தெரிந்தெடுத்து அதனைத் திரும்ப இடாமல் ஓர் இரண்டாம் பந்தை எடுக்கின்றமையால் இரண்டாம் பந்தை எடுக்கும்போது பையில் மொத்தப் பந்துகள் 10 இல் 9 பந்துகள் எஞ்சியிருக்கின்றன. அவ்வவ் நிறங்களில் எஞ்சியிருக்கும் பந்துகளின் எண்ணிக்கை முதலாவதாக எடுத்த பந்தின் நிறத்தைச் சார்ந்தது.

முதலாவது பந்து வெள்ளை நிறமாயின் இரண்டாவது பந்து வெள்ளைப் பந்தாக எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{6}{9}$

முதற் பந்து வெள்ளையன்று எனின் இரண்டாம் பந்து வெள்ளையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{7}{9}$

இவ்விரு நிகழ்தகவுகளும் சமமல்ல ஆகையால் இரண்டாவது பந்து வெள்ளையாக இருத்தல் என்பது முதலாவது பந்து வெள்ளையாக இருத்தல் என்பதில் தங்கியுள்ளது. ஆகவே இவை இரண்டும் சார் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

25.2 நெய்யரியைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

இரு படிமுறைகளைக் கொண்ட ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையில் ஒரு படிமுறையின் நிகழ்ச்சி மற்றைய படிமுறையின் நிகழ்ச்சியை சாராமல் அல்லது சார்ந்து இருக்கலாம். சாராமல் இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் பிரசினத்தைத் தீர்த்தல் பற்றித் தரம் 10 இல் ஆராய்ந்தோம். அதனை மீட்பதற்குப் பின்வரும் உதாரணங்களைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

ஒரு பையில் ஒரே அளவுள்ள 3 நீலநிறப் பந்துகளும் 2 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. எழுமாற்றாக அவற்றிலிருந்து ஒரு பந்தை வெளியே எடுத்து அதனைத் திரும்பப் பையில் இட்டு ஓர் இரண்டாம் பந்தையும் எடுத்து நிறம் சோதிக்கப்படுகின்றது.

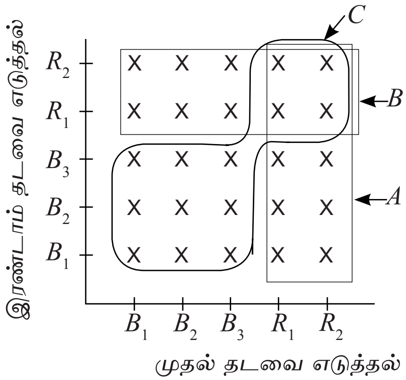
(i) இந்த எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரி வெளியை ஒரு நெய்யரியில் வகை குறிக்க.

(ii) நெய்யரியைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(a) முதற் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருத்தல்.
(b) இரண்டாம் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருத்தல்.
(c) இரு பந்துகளும் சிவப்பு நிறமாக இருத்தல்.
(d) இரு பந்துகளும் ஒரே நிறமுள்ளனவாக இருத்தல்.
(e) குறைந்தபட்சம் ஒரு பந்தேனும் சிவப்பு நிறமாக இருத்தல்.

(i) நெய்யரியை நிகழ்தகவுப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்குப் பயன்படுத்தும்போது இயலத்தக்க எல்லா நிகழ்ச்சித் தொடையையும் அல்லது மாதிரி வெளியையும் சமதகவுள்ள பேறுகளைக் கொண்டிருக்குமாறு அமைத்துக்கொள்ள வேண்டுமென நாம் முன்னர் கற்றோம். பையில் 3 நீலநிறப் பந்துகள் இருக்கும் அதே வேளை சிவப்பு நிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை அதிலும் பார்க்க 1 குறைவாக உள்ளது. ஆகவே பையிலிருந்து ஒரு நீலநிறப் பந்து கிடைத்தல், ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து கிடைத்தல் ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் சமதகவுள்ளவை அல்ல.

ஆனால் பந்துகள் அளவில் சமமாகையால் யாதாயினும் ஒரு பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு சமமாகும். ஆகவே மாதிரி வெளியை நெய்யரியில் காட்டும்போது மூன்று நீலநிறப் பந்துகளை B_1, B_2, B_3 எனவும் இரு சிவப்பு நிறப் பந்துகளை R_1, R_2 எனவும் குறிப்போம்.



முதல் தடவை எடுக்கும்போது சமதகவுள்ள பேறைக் கிடை அச்சிலும் இரண்டாம் தடவை எடுக்கும்போது இயலத்தக்க பேறை நிலைக்குத்து அச்சிலும் கொண்டு குறிக்கப்படும் புள்ளிகளின் மூலம் மாதிரிவெளி காட்டப்படுகின்றது.

முதல் எடுத்த பந்தைத் திரும்ப இட்டு இரண்டாவது பந்து எடுக்கப்பட்டு சோதிக்கப் படுகின்றமையால் முதல் நிகழ்ச்சியும் இரண்டாவது நிகழ்ச்சியும் சாராத நிகழ்ச்சி களாகும்.

குறிப்பு: நெய்யரியைக் கொண்டு ஒரு நிகழ்தகவைக் காண்பதற்குத் தரப்பட்டுள்ள நிகழ்ச்சிக்குரிய புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை மாதிரி வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையின் அரைவாசியெனக் காட்டுதல் வேண்டும்.

(ii)(a) முதற்பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சிக்குரிய புள்ளிகள் நெய்ய ரியில் அடைப்பிட்டு A எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன. அதில் 10 புள்ளிகள் உள்ளன. மாதிரிவெளியில் 25 புள்ளிகள் உள்ளன.

$\therefore$ முதற் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{\text{அடைப்பு } A \text{ யில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரி வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

(b) இரண்டாம் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சிக்குரிய புள்ளிகள் நெய்யரியில் அடைப்பிட்டு B எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன.

$\therefore$ இரண்டாம் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{\text{அடைப்பு } B \text{ யில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரி வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

(c) இரு பந்துகளும் சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான புள்ளிகள் A, B என்னும் இரு அடைப்புகளுக்கும் பொதுவான புள்ளிகளாகும். அதில் 4 புள்ளிகள் உள்ளன.

∴ இரண்டு பந்துகளும் சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{\text{இரு அடைப்புகளுக்கும் பொதுவான புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரி வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{4}{25}$$

(d) இரு பந்துகளும் ஒரே நிறத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கு இரண்டும் நீல நிறமாக அல்லது இரண்டும் சிவப்பு நிறமாக இருத்தல் வேண்டும். அதற்குரிய புள்ளிகள் பிரதேசம் C இல் காட்டடப்பட்டுள்ளன. அதில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 13 ஆகும்.

∴ இரு பந்துகளும் ஒரே நிறத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{\text{பிரதேசம் } C \text{ யில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரி வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{13}{25}$$

(e) குறைந்தபட்சம் ஒரு பந்தேனும் சிவப்புப் பந்தாக இருப்பின் ஒன்று அல்லது இரண்டும் சிவப்பு நிறமாக இருத்தல் வேண்டும். A, B ஆகிய இரு அடைப்புகளிலும் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் உரியனவாகும். அதில் 16 புள்ளிகள் இருக்கின்றமையால், குறைந்தப்பட்சம் ஒரு பந்தேனும் சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{16}{25}$

தற்போது இரண்டு படிமுறைகளில் நடைபெறும் சார் நிகழ்ச்சியொன்றின் நிகழ்தகவை காண்பதை உதாரணமொன்றின் மூலம் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 2

ரிகானாவின் பென்சில் பெட்டியில் 2 பச்சை நிறப் பென்சில்களும் 3 கறுப்பு நிறப் பென்சில்களும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பென்சிலைத் தெரிந்தெடுத்துத் தனது நண்பி சங்கரிக்குக் கொடுக்கின்றார். அதன் பின்னர் ரிகானாவும் ஒரு பென்சிலை எழுமாற்றாகத் தேர்ந்தெடுக்கின்றார்.

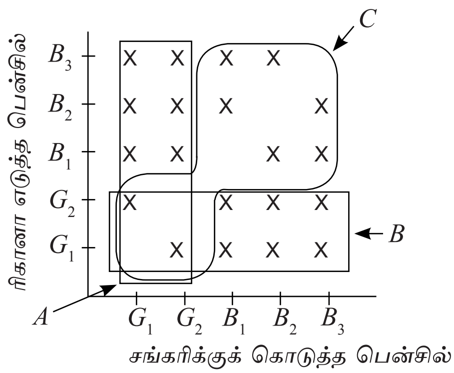
(i) மாதிரி வெளியை ஒரு நெய்யரியில் காட்டுக.

(ii) நெய்யரியைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(a) சங்கரிக்கு ஒரு பச்சை நிறப் பென்சிலைக் கொடுத்தல்
(b) ரிகானாவுக்கு ஒரு பச்சை நிறப் பென்சில் கிடைத்தல்
(c) இருவருக்கும் ஒரே நிறம் கிடைத்தல்
(d) சங்கரிக்கு மாத்திரம் ஒரு கறுப்பு நிறப் பென்சில் கிடைத்தல்

(i) ரிகானாவின் பென்சில் பெட்டியில் இருந்த இரு பச்சை நிறப் பென்சில்களையும் G_1, G_2 எனவும் மூன்று கறுப்பு நிறப் பென்சில்களையும் B_1, B_2, B_3 எனவும் கொள்வோம்.

சங்கரிக்குக் கொடுத்த பென்சில் R_1, R_2, B_1, B_2, B_3 ஆகியவற்றிற்கிடையே ஒன்றாகவும் ரிகானா எடுத்த பென்சிலும் அவற்றிடையே ஒன்றாகவும் இருக்கலாம். ஆனால் சங்கரிக்குக் கிடைக்கும் பென்சில் ரிகானாவிற்குக் கிடைக்க முடியாது ஆகையால் $(R_1, R_1), (R_2, R_2), (B_1, B_1), (B_2, B_2), (B_3, B_3)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்குரிய நிகழ்ச்சிகள் இருக்க முடியாது. ஆகவே அந்த ஐந்து புள்ளிகளும் தவிர எஞ்சியுள்ள 20 புள்ளிகள் மாத்திரம் நெய்யரியில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.



(ii) நெய்யரியைக் கொண்டு நிகழ்தகவைக் காண்பதற்குத் தரப்பட்டுள்ள நிகழ்ச் சிக்குரிய புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை மாதிரி வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

(a) சங்கரிக்கு ஒரு பச்சைப் பென்சிலைக் கொடுப்பதற்குரிய 8 புள்ளிகள் அடைப்பு A இல் உள்ளன.

$\therefore$ சங்கரிக்கு ஒரு பச்சை நிறப் பென்சிலைக் கொடுப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $= \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$

(b) ரிகானாவிற்கு ஒரு பச்சை நிறப் பென்சில் கிடைப்பதற்குரிய புள்ளிகள் அடைப்பு B யில் உள்ளன. அதில் 8 புள்ளிகள் இருக்கின்றன.

$\therefore$ ரிகானாவிற்கு ஒரு பச்சை நிறப் பென்சில் கிடைப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $= \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$

(c) இருவருக்கும் ஒரே நிறமுள்ள பென்சில்கள் கிடைப்பதற்குரிய புள்ளிகள் பிரதேசம் C இல் உள்ளன. அதாவது இருவருக்கும் பச்சை நிறம் அல்லது இருவருக்கும் கறுப்பு நிறம் கிடைக்க வேண்டும்.

$\therefore$ இருவருக்கும் ஒரே நிறம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

(d) சங்கரிக்கு மாத்திரம் ஒரு கறுப்பு பென்சில் கிடைப்பதற்குரிய புள்ளிகள் அடைப் பிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளன. சங்கரிக்கு மாத்திரம் கறுப்பு நிறமெனின் ரிகானாவுக்கு பச்சை நிறம் கிடைத்தல் வேண்டும். அத்தகைய 6 புள்ளிகள் உள்ளன.

$\therefore$ சங்கரிக்கு மாத்திரம் ஒரு கறுப்பு நிறப் பென்சில் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

பயிற்சி 25.2

1. ஒரு பெட்டியில் ஒரே அளவான 3 வெள்ளை நிறப் பந்துகளும் 4 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து எழுமாறாக ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டு அதன் நிறம் பரிசோதிக்கப்படுகின்றது.

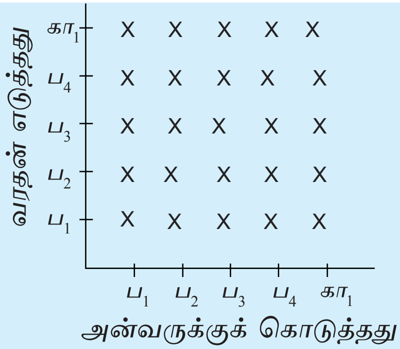
(a) சமதகவுள்ள பேறுகளை உள்ளடக்கிய மாதிரிவெளி S இன் மூலகங்களைத் தருக.

(b) முதலில் எடுத்த பந்தை மீண்டும் பெட்டியில் இட்டு இன்னுமொரு பந்து எழுமாறாக எடுக்கப்பட்டு நிறம் பரிசோதிக்கப்படுகின்றது எனின், சமதகவுள்ள எளிய நிகழ்ச்சிகள் உள்ளடங்கிய மாதிரி வெளியை நெய்யரியில் தருக.

(c) முதலில் எடுத்த பந்து மீண்டும் உள்ளே வைக்கப்படாமல் இரண்டாவது பந்து எழுமாறாக எடுக்கப்பட்டு நிறம் பரிசோதிக்கப்படுமாயின் மாதிரி வெளியை நெய்யரியில் குறிக்க.

(d) இரண்டு தடவைகளிலும் எடுத்த பந்துகள் இரண்டும் ஒரே நிறத்தைக் கொண்டவையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை மேற்குறித்த (b), (c) ஆகிய சந்தர்ப்பங்களுக்குரியதாகக் காண்க.

2. ஒரு பையில் ஒரே அளவான 4 மாம்பழங்களும் 1 மாங்காயும் உண்டு. இவற்றிலிருந்து ஒன்றை எழுமாறாக எடுத்த வரதன் இதனை தனது நண்பனாகிய அன்வருக்குக் கொடுத்தான். பின்னர் வரதனும் ஒன்றை எடுத்தான் இதற்கென வரதன் தயாரித்த சம நேர்தகவுள்ள பேறுகளை உள்ளடக்கிய மாதிரிவெளி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



(a) இந்நெய்யரியில் ஒரு வழு உண்டு. அதனைச் சீர்செய்து மீண்டும் தயாரிக்க.

(b) சரியான நெய்யரியிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) இருவருக்கும் பழங்கள் கிடைத்தல்

(ii) அன்வருக்கு மாத்திரம் பழம் கிடைத்தல்

(iii) ஒருவருக்கு மட்டும் பழம் கிடைத்தல்

(c) இங்கு குறைந்தபட்சம் ஒருவருக்கேனும் பழமொன்று கிடைப்பது நிச்சயமான நிகழ்வு என குமார் கூறுகின்றார். இக்கூற்றின் செவ்வைத் தன்மையைக் காரணங்களுடன் விளக்குக.

3. ஒரு சுற்றுலா செல்வதற்குத் தயாரான பீற்றர் தனது ஆடைப்பெட்டியிலிருந்த 4 வெள்ளை நிற மேற்சட்டைகளிலும் 3 கறுப்பு நிற மேற்சட்டைகளிலிருந்து எழுமாறாக இரண்டு மேற்சட்டைகளை எடுத்தான்.

(a) வெள்ளை நிற மேற்சட்டைகள் நான்கையும் W_1, W_2, W_3, W_4 எனவும் கறுப்பு நிற மேற்சட்டைகள் மூன்றையும் B_1, B_2, B_3 எனவும் கொண்டு மாதிரி வெளியைத் தயாரிக்க.

(b) நெய்யரியிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(i) இரண்டு மேற்சட்டைகளும் வெள்ளையாக இருத்தல்.

(ii) ஒரு மேற்சட்டை மாத்திரம் வெள்ளையாக இருத்தல்.

(iii) குறைந்த பட்சம் ஒரு மேற்சட்டையேனும் வெள்ளையாக இருத்தல்.

4. ஒரு பாத்திரத்தில் ஒரே அளவும் வடிவமும் கொண்ட பாற்சுவையுள்ள 3 இனிப்புகளும் தோடம்பழச் சுவையுள்ள 3 இனிப்புக்களும் புளியம்பழச் சுவையுள்ள 1 இனிப்பும் உண்டு. ரியாஸ் இவற்றிலிருந்து ஓர் இனிப்பை எழுமாறாக எடுத்து சுவைத்துப் பார்த்தான். பின்னர் தனது நண்பியாகிய விஜிக்கும் ஓர் இனிப்பை எழுமாறாக எடுத்து வழங்கினான்.

(a) இனிப்புகளின் சுவைகளைக் கருத்திற் கொண்டு சமதகவுள்ள பேறுகளை உள்ளடக்கிய மாதிரி வெளியை நெய்யரியில் குறிக்க.

(b) நெய்யரியிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(i) இருவருக்கும் ஒரே சுவையுடைய இரண்டு இனிப்புகள் கிடைத்தல்
(ii) ஒருவருக்கு மட்டும் பாற்சுவையுடைய ஓர் இனிப்புக் கிடைத்தல்
(iii) விஜிக்குப் புளியம்பழச் சுவையுடைய ஓர் இனிப்புக் கிடைத்தல்

25.3 மரவரிப்படத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனை இரு படிமுறைகளைக் கொண்டிருக்கும்போது அவ்விரு படிமுறைகளுக்கும் உரிய இரு நிகழ்ச்சிகளுடனும் தொடர்புபட்ட ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்கு மரவரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தலாம். பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு அதனைப் பற்றிக் கற்க.
இரு நிகழ்ச்சிகள் சாரா நிகழ்ச்சிகளாக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்திற்கு ஓர் உதாரணம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

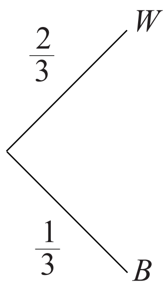
உதாரணம் 1

ஒரு பையில் ஒரே அளவுள்ள இரு வெள்ளை நிறப் பந்துகளும் ஒரு கறுப்பு நிறப் பந்தும் உள்ளன. இதிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பந்தை வெளியே எடுத்து அதன் நிறம் குறிக்கப்படுகின்றது. அதன் பின்னர் அதனைத் திரும்பப் பையில் இட்டு மறுபடியும் ஒரு பந்து எடுத்து நிறம் குறிக்கப்படுகின்றது.

(i) இந்த எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளியை ஒரு மரவரிப்படத்தில் காட்டுக.
(ii) மரவரிப்படத்தைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவைக் காண்க.
(a) இரண்டு முறைகளும் வெள்ளை நிறப் பந்தைப் பெறல்
(b) முதலாம் முறை ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்து கிடைத்தல்.
(c) ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்து மாத்திரம் கிடைத்தல்.
(d) குறைந்தது ஒரு முறையேனும் ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்து கிடைத்தல்.

(i) ஒரு பந்து வெள்ளை நிறமாக இருப்பதை W இனாலும் ஒரு பந்து கறுப்பு நிறமாக இருத்தலை B இனாலும் குறிப்போம். முதலில் எடுத்த பந்து வெள்ளை நிறமுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ உம் அது கறுப்பு நிறமுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ உம் ஆகும். முதலில் எடுப்பதற்குரிய மரவரிப்படத்தின் பகுதியின் கிளை மீது உரிய நிகழ்தகவைக் குறிப்போம்.

முதலாவதாக எடுத்தல்



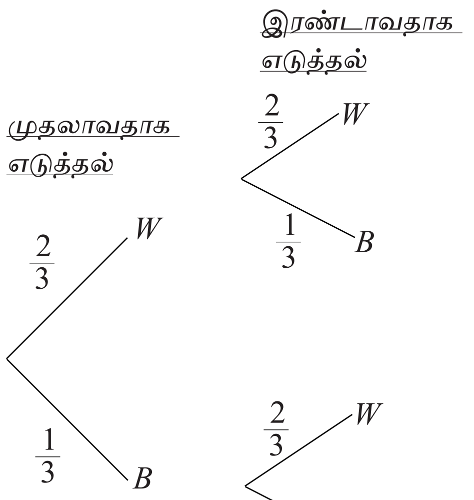
இவ்விரு கிளைகளின்மீதும் உள்ள நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

$= 1$

குறிப்பு : மர வரிப்படத்தின் ஓர் இடத்திலிருந்து விரியும் கிளைகளின் மீது உள்ள நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை 1 ஆகும்.

இப்போது மேற்குறித்த மரவரிப்படத்தை எழுமாற்று சோதனையின் இரண்டாம் படிமுறை வரைக்கும் விரிவுபடுத்துவோம்.



முதலாவதாக எடுத்த பந்தைத் திரும்பப் பையில் இட்டு இரண்டாம் பந்து எடுக்கப் படுகின்றமையால் இரண்டாம் பந்து எடுக்கப்படும்போது பையில் உள்ள பந்துகளின் எண்ணிக்கை மாறுவதில்லை. ஆகவே இரண்டாவதாக எடுத்த ஒரு பந்தும் வெள்ளை நிறமாக அல்லது கறுப்பு நிறமாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவும் முதற் சந்தர்ப்பத்தில் எடுத்த பெறுமானங்களையே எடுக்கின்றன. அப்பெறுமானங்கள் உரிய கிளைகளின் மீது காட்டப்பட்டுள்ளன.

இச்சந்தர்ப்பத்தில் ஓர் இடத்திலிருந்து விரியும் கிளைகளின் மீது உள்ள நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை 1 என்பதை உறுதிப்படுத்துக.

(ii) இரு சந்தர்ப்பங்களையும் கருத்திற்கொள்ளும்போது இயலத்தக்க நான்கு நிகழ்ச்சிகள் உள்ளன. அவை பின்வரும் அட்டவணையில் உரிய நிகழ்தகவுகளுடன் காட்டப்பட்டுள்ளன.

நிகழ்ச்சி	நிகழ்தகவு	
(W, W)	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
(W, B)	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
(B, W)	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$
(B, B)	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

இங்கு (W, W) மூலம் முதற்பந்து வெள்ளை நிறமாகவும் இரண்டாவதும் வெள்ளை நிறமுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ காட்டப்படுகின்றது. இவை சார நிகழ்ச்சிகள் என்பதால் இவற்றை பெருக்குவதன் மூலம் நிகழ்தகவு பெறப்படுகின்றது. இவ்வாறு எடுத்துள்ள (W, W), (W, B), (B, W), (B, B) என்னும் நான்கு நிகழ்ச்சிகளும் தம்முள் புற நீக்குவனவாகும். அதற்குக் காரணம் இந்நான்கு நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்று இரண்டு நிகழ்ச்சி கள் ஒரே நேரத்தில் நடைபெற மாட்டாது. இதற்கேற்ப இவ்வுதாரணத்திற்குரிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் கீழே காட்டுவோம்.

(a) இரண்டு முறைகளிலும் வெள்ளைப் பந்துகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(W, W)$$
$$= \frac{2}{9} \text{ (அட்டவணையைக் கொண்டு)}$$

(b) முதலில் ஒரு வெள்ளைப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(W, W) + P(W, B)$$
$$= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

(c) 1 வெள்ளை நிறப் பந்து மாத்திரம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(W, B) + P(B, W)$$
$$= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

(d) குறைந்த பட்சம் ஒரு வெள்ளைநிறப் பந்தேனும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(W, W) + P(W, B) + P(B, W)$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{2} = \frac{8}{9}$$

குறிப்பு : பகுதி (d) யின் விடையை $1 - P(B, B)$ இலிருந்தும் பெறலாம்.

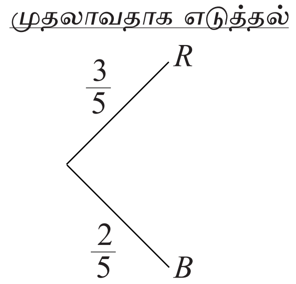
இரு நிகழ்ச்சிகளும் சார் நிகழ்ச்சிகளாக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்திற்கு ஓர் உதாரணம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 2

ஒரு பையில் ஒரே அளவுள்ள 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் 2 நீல நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பந்தை வெளியே எடுத்து அதனைத் திரும்பப் பையில் இடாமல் இரண்டாவது பந்தை எடுத்து நிறம் குறிக்கப்படுகின்றது.

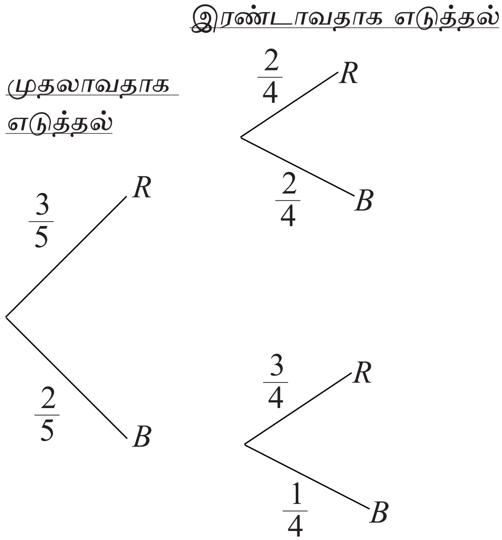
(i) மாதிரி வெளியை ஒரு மரவரிப்படத்தில் காட்டுக.
(ii) மரவரிப்படத்தைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.
 (a) இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து கிடைத்தல்.
 (b) ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் மாத்திரம் ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து கிடைத்தல்.
 (c) குறைந்தது ஒரு சந்தர்ப்பத்திலேனும் ஒரு சிவப்பு நிறப்பந்து கிடைத்தல்.

(i) மரவரிப்படத்தின் முதற்பகுதி கீழே காணப்படுகின்றது.



இங்கு R இன் மூலம் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருத்தலும் B இன் மூலம் நீலநிறமாக இருத்தலும் காட்டப்படுகின்றன. பையில் 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் 2 நீலநிறப் பந்துகளும் இருக்கின்றமையால் $P(R) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{2}{5}$ ஆகும்.

இந்நிகழ்வு மரவரிப்படத்தில் உரிய கிளைகளின்மீது குறிப்பிடப்படுகின்றது. இப்போது மரவரிப்படத்தின் முதற்பகுதியை விரிவுபடுத்துவதன் மூலம் இரண்டாவதாக எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காட்டுவோம்.



இப்பகுதியில் கிளைகளின் மீது காட்டப்படும் நிகழ்தகவுகள் முதற்பகுதியில் உள்ள பெறுமானங்களிலிருந்து வேறுபட்டவையாகும். முதல் நிகழ்ச்சியைக் கருதி இரண்டாம் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவை எடுக்க வேண்டும்.

முதல் பந்து சிவப்பு நிறமானதெனின், பையில் 2 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் 2 நீலநிறப் பந்துகளும் எஞ்சியிருக்கும்.

$\therefore$ இரண்டாம் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{2}{4}$

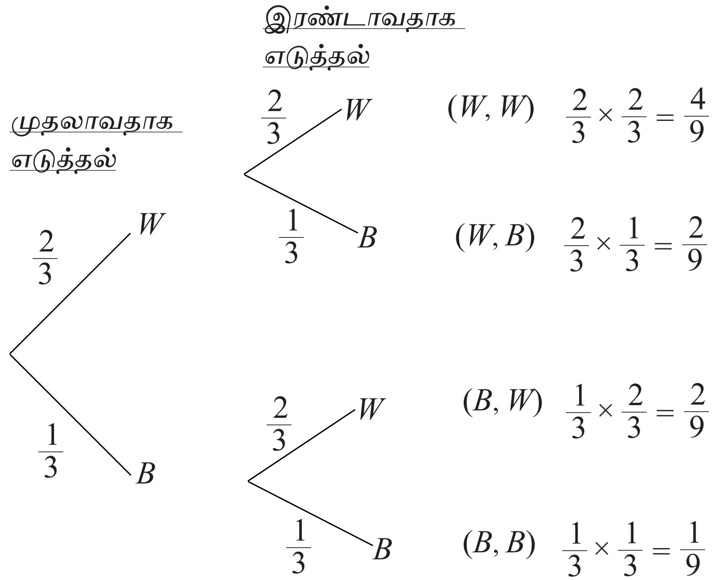
இரண்டாம் பந்து நீல நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{2}{4}$

முதற் பந்து நீலநிறமாக இருப்பின், பையில் 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் 1 நீல நிறப் பந்தும் எஞ்சியிருக்கும்.

$\therefore$ இரண்டாம் பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{4}$

இரண்டாம் பந்து நீல நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{4}$

இந்நிகழ்தகவுகளை மரவரிப்படத்தில் உரிய கிளைகளின் மீது குறித்து நிகழ்ச்சி அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துவோம். இந்நான்கு நிகழ்ச்சிகளினதும் நிகழ்வுகளின் மொத்தம் 1 என்பதை உறுதிப்படுத்துக.



நிகழ்ச்சி	நிகழ்தகவு	
(R, R)	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{6}{20}$
(R, B)	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{6}{20}$
(B, R)	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$	$\frac{6}{20}$
(B, B)	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$	$\frac{2}{20}$

இவ்வட்டவணையில் உள்ள (R, R), (R, B), (B, R), (B, B) ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் தம்முள் புறநீக்குகின்றன. ஆகவே மரவரிப்படத்தைக் கொண்டு ஒரு குறித்த நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் காண்பதற்கு நாம் அட்டவணையினூடாக அதற்குரிய நிகழ்ச்சிகளைத் தெரிந்தெடுத்து அவை நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காணல் வேண்டும்.

(a) இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(R, R)$$
$$= \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(b) ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் மாத்திரம் ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(R, B) + P(B, R)$$
$$= \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

(c) குறைந்தப்பட்சம் ஒரு முறையேனும் ஒரு சிவப்பு நிறப்பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(R, B) + P(B, R) + P(R, R)$$

$$= \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

குறிப்பு : பகுதி (c) யின் விடையை $1 - P(B, B)$ இலிருந்தும் பெறலாம்.

பயிற்சி 25.3

1. ஒரே வகையான 10 மின்குமிழ்கள் உள்ள ஒரு பெட்டியில் 3 மின்குமிழ்கள் பழுதானவை ஆகும். நிமலன் அவற்றில் ஒரு குமிழை எழுமாற்றாக எடுத்து அது பழுத்துள்ளதாவெனச் சோதித்து அதனைத் மீண்டும் இடமால் இரண்டாம் மின்குமிழை எடுத்துச் சோதிக்கின்றான்.

(i) இந்த எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளியை ஒரு மரவரிப் படத்தில் காட்டுக.

(ii) முதலில் ஒரு பழுதுள்ள மின்குமிழ்கள் கிடைத்தல், இரண்டாவதாகவும் ஒரு பழுதுள்ள மின்குமிழ் கிடைத்தல் என்னும் நிகழ்ச்சிச் சோடி சார் நிகழ்ச்சிகள் என நிமலன் கூறுகின்றான். அது சரியா, பிழையா எனக் காரணங்களுடன் காட்டுக.

(iii) மரவரிப்படத்தைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(a) எடுத்த இரு மின்குமிழ்களும் பழுதுள்ளனவாக இருத்தல்.

(b) எடுத்த ஒரு மின்குமிழ் மாத்திரம் பழுதுள்ளதாக இருத்தல்.

(c) குறைந்தபட்சம் ஒரு மின்குமிழேனும் பழுதுள்ளதாக இருத்தல்.

2. A என்னும் ஓர் உதைப்பாந்தாட்ட வீரர் குறித்த ஒரு போட்டியில் விளையாடுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{4}$ உம் வீரர் A அப்போட்டியில் விளையாடினால் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{8}$ உம் ஆவதுடன் விளையாடாவிடின் வெற்றி பெறுவதும் தோல்வியடைவதும் சமதகவுடையவனவாகும். இப்போட்டியானது வெற்றி, தோல்வி இன்றி நிறைவு பெற்றது.

(i) A என்னும் வீரர் இப்போட்டியில் விளையாடாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) A என்னும் வீரர் இப்போட்டியில் விளையாடாதிருப்பின் வெற்றி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iii) A என்னும் வீரர் விளையாடுவதையும் விளையாடாதிருப்பதையும் முதல் பகுதியிலும் போட்டியில் வெற்றி பெறுவதையும் தோல்வியடைவதையும் இரண்டாவது பகுதியிலும் கொண்டு மாதிரிவெளியை ஒரு மரவரிப் படத்தில் குறிக்க.

(iv) மரவரிப் படத்திலிருந்து இந்த உதைப்பந்தாட்டக் குழு போட்டியில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(v) A என்னும் வீரர் இப்போட்டியில் விளையாடுதல் கூடிய அனுகூலமுடையதா என்பதைக் காரணங்களுடன் தருக.

3. ஒரு பையில் ஒரே அளவுள்ள 4 விளாம்பழங்களும் 3 விளாங்காய்களும் உள்ளன. கண்ணன் இவற்றில் ஒன்றை எழுமாற்றாக எடுத்து அது பழமெனின் அதனைத் திரும்பப் பையில் இடாமல் இரண்டாவதை எடுத்தான். முதலில் எடுத்தது காய் எனின், அதனைத் திரும்பப் பையில் இட்டு இரண்டாவதை எடுத்தான்.

(i) இந்த எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளியை ஒரு மரவரிப் படத்தில் காட்டுக.

(ii) கண்ணனின் பின்வரும் கூற்றுகளில் எவை பிழையெனக் காரணங்களுடன் காட்டுக.

(a) ''முதலில் எடுத்தது பழமாகவும் இரண்டாவதாக எடுத்தது பழமாகவும் இருத்தல் இரு சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.''

(b) ''முதலில் எடுத்தது காயாகவும் இரண்டாவதாக எடுத்தது காயாகவும் இருத்தல் இரு சார் நிகழ்ச்சிகள்.''

(iii) மரவரிப்படத்தைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(a) எடுத்த இரண்டும் பழமாக இருத்தல்.

(b) இரண்டாவதாக எடுத்தது பழமாக இருத்தல்.

(c) எடுத்த இரண்டில் ஒன்று மாத்திரம் பழமாக இருத்தல்.

4. மோகனின் மாட்டுப் பண்ணையில் 5 எருதுகளும் 15 பசுக்களும் உள்ளன. நாதனின் மாட்டுப் பண்ணையில் 2 எருதுக்களும் 8 பசுக்களும் உள்ளன. மோகனும் நாதனும் ஒரு மாடு வீதம் பரிமாற்றிக் கொள்வதற்கு உடன்பட்டனர். முதலில் மோகன் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த ஒரு மாட்டை நாதனுக்கு அனுப்பிய பின்னர் நாதன் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த ஒரு மாட்டை மோகனுக்கு அனுப்பினார்.

(i) மாதிரி வெளியை ஒரு மரவரிப்படத்தில் காட்டுக.

(ii) அதனைக் கொண்டு பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(a) பரிமாறுகையால் மோகனின் மாட்டுப் பண்ணையில் ஓர் எருது குறைதல்.

(b) பரிமாறியமையால் மோகனின் மாட்டுப் பண்ணையில் ஓர் எருது அதிகரித்தல்.

(c) பரிமாறியமையால் இரு மாட்டுப் பண்ணைகளிலும் எருதுகளின் எண்ணிக்கையும் பசுக்களின் எண்ணிக்கையும் மாறாதிருத்தல்.

(iii) ஒரே நாளில் மோகனும் நாதனும் நமது மாட்டுப் பண்ணைகளிலிருந்து ஒரு மாடு வீதம் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்து நண்பன் அப்துலின் வீட்டிற்குச் சென்று அங்கு இரு மாடுகளையும் பரிமாறிக் கொண்டு மாட்டுப் பண்ணை களில் விடுவித்தனர் எனின் மேலே (ii) இல் உள்ள நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

5. ஒரு நோய்க்கு வழங்கப்படும் X, Y ஆகிய மருந்துகள் முறையே 90%, 80% நோயைக் குணப்படுத்தின. ஒரு மருந்தினால் குணப்படுத்தாவிட்டால் மற்றைய மருந்து கொடுக்கப்படும். அதுவும் வெற்றி அளிக்காவிடின் அறுவைச் சிகிச்சை மேற்கொள்ளப்படும்.

(i) ஒரு நோயாளிக்கு முதலில் கொடுக்கப்படுவதற்கு உகந்த மருந்தைக் காரணங்களுடன் காட்டுக.

(ii) இருவகை மருந்துகளை வழங்கிய பின்னர் நோய் குணப்படுவதற்கான நிகழ்தகவை பின்னமாகத் தருக.

(iii) ஒரு நோயாளியில் அறுவை சிகிச்சையை மேற்கொள்வதற்கான நிகழ்தகவைத் தசமமாகக் காட்டுக.

6. ஒரு நிறுவனத்தில் பணியாற்றும் எழுதுநர் பதவியையும் தொழிலாளர் பதவியையும் வகிப்பவர்களின் தகவல்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றது.

பால் / பதவி	ஆண்	பெண்	மொத்தம்
எழுதுநர்	5	8	13
தொழிலாளர்	2	1	3
மொத்தம்	7	9	16

(i) இந்நிறுவனத்திலிருந்து எழுமாற்றாக தெரிந்தெடுத்த ஒருவர்
  (a) தொழிலாளர் பதவியை வகிப்பவராக
  (b) பெண் எழுதுனராக
  (c) பெண் எனின் அவர் தொழிலாளர் பதவியை வகிப்பவராக
இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) இந்நிறுவனத்திலிருந்து எழுதுநர் பதவியை வகிக்கும் ஒருவரும் தொழிலாளர் பதவி வகிக்கும் ஒருவரும் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றர்.
  (a) இயலத்தக்க எல்லா பேறுகளையும் ஒரு மரவரிப்படத்தில் காட்டுக.
  (b) அதிலிருந்து, தெரிந்தெடுத்த இருவரிடையே ஒருவரேனும் ஆணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

7. ஒரு பெட்டியில் ஒரே அளவுள்ள 2 வெள்ளை நிறப் பந்துகளும் 1 கறுப்பு நிறப் பந்தும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பந்தை வெளியே எடுத்து அதனை வெளியே இட்டு ஓர் இரண்டாம் பந்து எடுக்கப்படுகின்றது. இவ்வாறு எடுத்த இரு பந்துகளிடையே குறைந்தபட்சம் ஒன்றேனும் வெள்ளைப் பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

8. A என்னும் ஒரு பெட்டியில் 3 நீல நிற மாபிள்களும் 2 சிவப்பு நிற மாபிள்களும் உண்டு. B என்னும் ஒரு பெட்டியில் 4 நீல நீல நிற மாபில்களும் 5 சிவப்பு நிற மாபிள்களும் உண்டு. பெட்டி A இலிருந்து ஒரு மாபிளை எடுத்து பெட்டி B இலும் பெட்டி B இலிருந்து ஒரு மாபிளை எடுத்து பெட்டி A இலும் இடப்படுகின்றது. பெட்டி A இலுள்ள மாபிள்களின் நிறத் தொகுதி மாறாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

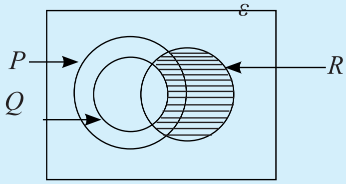
9. ஒரு குறித்த மகாவித்தியாலயத்தின் தரம் 11 இல் மூன்று சமாந்தர வகுப்புகள் உள்ளன. இம்மூன்று வகுப்புகளிலும் மாணவர் எண்ணிக்கைகள் 2: 2: 3 என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன. இம்மூன்று வகுப்புகளிலும் A, B, C என்ற மூன்று ஆசிரியர்கள் கணிதம் கற்பிக்கின்றனர். அதிபர் தமது நம்பிக்கையின் மீது பின்வரும் கூற்றை எடுத்துரைத்துள்ளார். " A கற்பிக்கும் வகுப்பில் 90%மாணவர்களும், B கற்பிக்கும் வகுப்பில் 80% மாணவர்களும் C கற்பிக்கும் வகுப்பில் 60% மாணவர்களும் எதிர்வரும் பரீட்சையில் சித்தியடைவார்கள்'' இக்கூற்றின்படி,
   (i) அப்பாடசாலையின் தரம் 11 இலிருந்து எழுமாற்றாகத் தேர்ந்தெடுத்த ஒரு மாணவன் பரீட்சையில் சித்தியடைந்தவனாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (ii) மேலே (i) இன் விடை மீது சித்தியடைந்த சதவீதத்தை மதிப்பிடுக.

மீட்டற் பயிற்சி
3 ஆம் தவணை

பகுதி I

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள சமனிலியைத் தீர்த்து, தீர்வுகளை ஓர் எண்கோட்டின் மீது குறிக்க.
$2x + 5 \leq 15$

2.

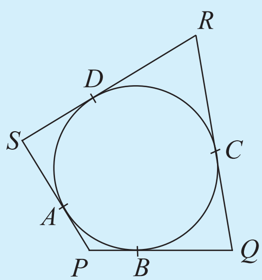


தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசத்தைத் தொடைக் குறிப்பீட்டில் எழுதுக.

3. ஓர் இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணியில் செம்பக்கத்தின் மீது வரையப்பட்ட சதுரத்தின் பரப்பளவு 64 cm^2 ஆகும். எஞ்சிய ஒரு பக்கத்தின் மீது வரையப்பட்ட ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

4. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ q \end{pmatrix}$ எனின் p, q ஐ காண்க.

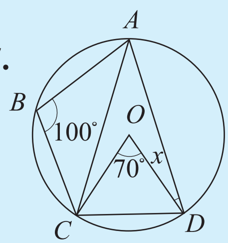
5.



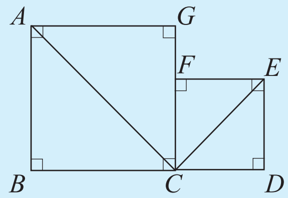
உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தில் பரிதியின்மீது அமைந்துள்ள A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகளில் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் உருவில் உள்ளவாறு P, Q, R, S என்பவற்றில் ஒன்றையொன்று சந்திக்கின்றன. $PQ + SR = 20$ cm ஆயின் $PQRS$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

6. A , B ஆகியன ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையில் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் ஆவதுடன் $P(A) = 0.4$ உம் $P(A \cup B) = 0.7$ உம் ஆகும். A, B ஆகியன சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆயின் $P(B)$ இன் பெறுமானம் காண்க.

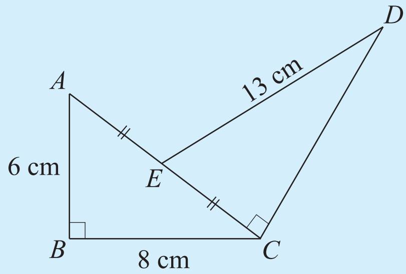
7.



உருவில் தரப்பட்டுள்ள O ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தில் $C\hat{O}D = 70^\circ$ உம் $C\hat{B}A = 100^\circ$ உம் ஆகும். $O\hat{D}A$ இன் பெறுமானம் காண்க.

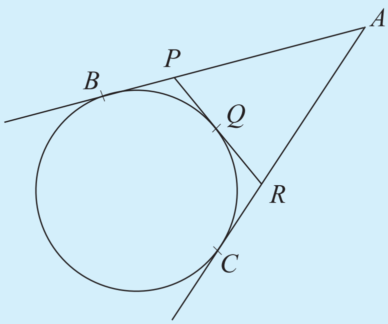
8. 

உருவில் தரப்பட்டுள்ள $ABCG$, $FCDE$ ஆகியன சதுரங்களாகும். $AC^2 = 12\ cm^2$, $CE^2 = 6\ cm^2$ ஆயின் உருவின் மொத்தப் பரப்பளவைக் காண்க.

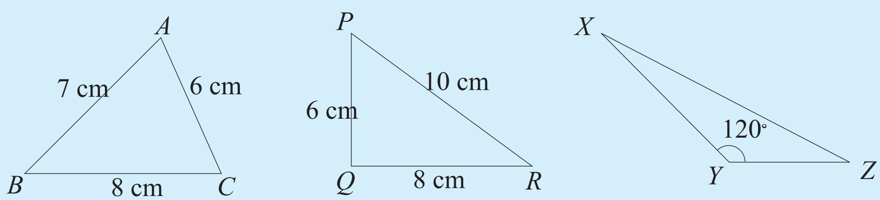
9. 

உருவில் தரப்பட்டுள்ள ABC, ECD ஆகியன செங்கோண முக்கோணிகளாகும். உருவின் மொத்தப் பரப்பளவைக் காண்க.

10. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ஆயின் $-2A$ என்னும் தாயத்தை எழுதுக.

11. 

தரப்பட்டுள்ள உருவில் A இலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலிச் சோடி AB, AC ஆகும். Q இல் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலியானது AB , AC ஆகிய பக்கங்களை P, R ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன. $\Delta\ APR$ இன் சுற்றளவு 18 cm ஆயின் AB இன் நீளத்தைக் காண்க.

12. 

(i) (ii) (iii)

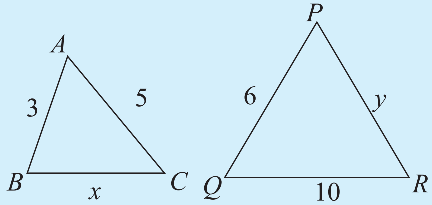
வெற்றிடத்துக்குப் பொருத்தமான உருவின் எண்ணை எழுதுக.

(a) சுற்றுவட்டத்தின் மையமானது ஒரு பக்கத்தின் மீது அமைவது .... வகையிலான முக்கோணியில் ஆகும்.

(b) சுற்றுவட்டத்தின் மையமானது முக்கோணியின் வெளியே அமைவது .... வகையிலான முக்கோணியிலாகும்.

(c) சுற்றுவட்டத்தின் மையமானது முக்கோணியின் உள்ளே அமைவது .... வகையிலான முக்கோணியில் ஆகும்.

13.



ΔABC, ΔPQR என்பன சமகோண முக்கோணிகள் எனின் x , y ஆகியவற்றைக் காண்க.

14. $4x + 3 \geq 8$ என்னும் சமனிலியைத் திருப்தி செய்யும் x இன் நிறைவெண் தீர்வுகளை ஓர் எண்கோட்டின்மீது குறிக்க.

15. $y = x^2 + 5x + 9$ என்னும் சார்பின் வரைபின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை வரைபை வரையாது எழுதுக.

பகுதி II

1. செங்கோண முக்கோணி ABC இல் $A\hat{B}C = 90^\circ$ ஆகும்.

(i) P என்பது BC இன் நடுப்புள்ளி ஆகும்போது $4\,(AP^2 - AB^2) = BC^2$ எனக் காட்டுக.

(ii) Q என்பது பக்கம் AB இன் நடுப்புள்ளி ஆகும்போது $4\,(CQ^2 - BC^2) = AB^2$ எனக் காட்டுக.

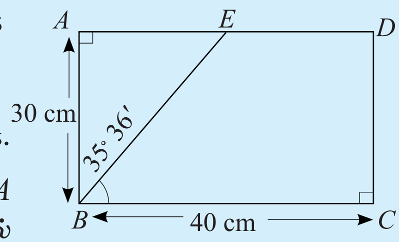
(iii) மேலே பெற்ற (i), (ii) ஆகியவற்றின் விடைகளைப் பயன்படுத்தி $4\,(AP^2 + CQ^2) = 5\,AC^2$ என உய்த்தறிக.

(iv) மேற்குறித்த முக்கோணி ABC இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணி ஆகும்போது மேலே (iii) இல் பெற்ற விடையைப் பயன்படுத்தி $AP{:}QP = \sqrt{5} : \sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.

2. (a) $ABCD$ ஒரு செவ்வகமாகும். திரிகோண கணித அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி

(i) AE இன் நீளத்தைக் காண்க.

(ii) சரிவகம் $BCDE$ இன் சுற்றளவைக் கணிக்க.



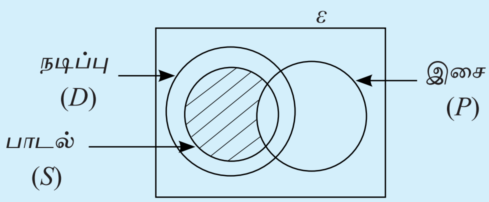
(b) A, B, C ஆகிய மூன்று நகரங்கள், நகரம் A இலிருந்து 040° திசைகோளில் 50 km தூரத்தில் நகரம் B உம், நகரம் B இலிருந்து 270° திசைகோளிலும் Aஇற்கு வடக்கேயும் நகரம் C உம் அமையுமாறு உள்ளன.

(i) பொருத்தமான பருமட்டான ஓர் உருவை வரைந்து மேலே தரப்பட்ட தகவல்களைக் குறிக்க.

(ii) நகரம் A இலிருந்து நகரம் C இற்குள்ள தூரத்தைக் காண்க.

(iii) இம்மூன்று நகரங்களுக்கும் நீரை வழங்குவதற்காக நீரைச் சேமிக்கக் ளகூடிய பாரிய ஒரு நீர்த்தாங்கியுடனான ஒரு கோபுரம் அமைக்க வேண்டியிருப்பதுடன், கோபுரத்திலிருந்து ஒவ்வொரு நகரத்துக்கும் நீரை வழங்கும் நீர்க்குளங்களின் நீளங்கள் சமனாகுமாறு அதனை அமைப்பதற்குப் பொருத்தமான இடத்தை மேற்குறித்த உருவில் T எனக் குறித்துக் காட்டுக.

3. 160 மாணவர்கள் கலந்து கொண்ட ஒரு கலை நிகழ்ச்சியில் பங்கேற்ற மாணவர் பற்றிய தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.



கலை நிகழ்ச்சியில் கலந்து கொண்டவர்களில் $\frac{1}{4}$ பங்கினர் நடிப்பு, பாடல், இசை ஆகியவற்றில் ஒன்றிலேனும் பங்கேற்றனர். இசை, நடிப்பு ஆகியவற்றில் பங்கேற்ற 16 பேரில் 6 பேர் பாடலிலும் பங்கேற்றனர். இசையில் மாத்திரம் பங்கேற்ற எண்ணிக்கையின் இரண்டு மடங்கினர் பாடலிலும் நடிப்பிலும் மட்டும் பங்கேற்றதுடன் ஐந்து மடங்கினர் நடிப்பில் மட்டும் கலந்துக் கொண்டனர்.

இங்கு முன்வைக்கப்பட்டுள்ள வென் உருவை உங்களது அப்பியாசக் கொப்பியில் பிரதிசெய்து உரிய வினாக்களுக்கு விடை தருக.

(i) மேலேயுள்ள தகவல்களை வென்னுருவில் சரியாகக் குறிக்க. நடிப்பு, பாடல், இசை ஆகிய மூன்றிலும் பங்கேற்றவர்கள் எத்தனைப் பேர்?

(ii) இசையில் மாத்திரம் பங்கேற்றவர்கள் எத்தனைப் பேர்?

(iii) ஓர் அம்சத்தில் மாத்திரம் பங்கேற்றவர்களின் எண்ணிக்கையை மொத்த மாணவரின் பின்னமாகத் தருக.

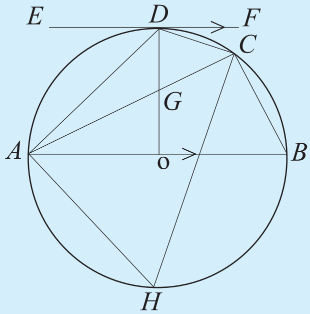
(iv) $(S' \cap D) \cap P$ இன் மூலம் குறிக்கப்படும் தொடைக்கு உரியவர்கள் எதில் கலந்து கொண்டனர் என்பதை விபரிக்க. அம்மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(v) வென்னுருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசத்தை உரிய தொடைக் குறிப்பீட்டில் எழுதுக.

4. A, B ஆகிய இரண்டு பாத்திரங்களில் வேறு நிறங்களிலான அளவில் சமனான பந்துகள் இடப்பட்டுள்ளன. பாத்திரம் A இல் 3 கறுப்பு பந்துகளும் 2 வெள்ளைப் பந்துகளும் பாத்திரம் B இல் 2 கறுப்பு பந்துகளும் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒருவர் பாத்திரம் A இலிருந்து ஒரு பந்தை எடுத்து பாத்திரம் B இல் இட்டு பின்னர் பாத்திரம் B இலிருந்து ஒரு பந்தை வெளியே எடுத்தார்.

(i) மேற்குறித்த நிகழ்ச்சிகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காட்டும் மர வரிப்படத்தை வரைக.

(ii) மரவரிப் படத்திலிருந்து இரண்டு தடவைகளிலும் ஒரே நிறத்திலான பந்துகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

5. 

உருவில் உள்ளவாறு O ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தில் AB என்பது விட்டமாகும். வட்டத்துக்கு D இல் வரையப் பட்டுள்ள தொடலி EF ஆனது AB இற்குச் சமாந்தரமாகும்.

(i) $A\hat{B}D$ இற்குச் சமனான இரண்டு கோணங்களை எழுதுக.

(ii) $E\hat{D}O$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(iii) $OBCG$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனக் காட்டுக.

6. கவராயம் mm/cm அளவுத் திட்டத்தையுடைய நேர் விளிம்பு ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி அமைப்புக் கோடுகளைத் தெளிவாகக் காட்டி,

(i) $AB = 8$ cm, $A\hat{B}C = 90^\circ$, $BC = 4$ cm ஆகுமாறு முக்கோணி ABC ஐ அமைக்க.

(ii) $DC = 2$ cm உம் $DC \parallel AB$ உம் ஆகுமாகுமாறு சரிவகம் $ABCD$ ஐ அமைக்க.

(iii) நீட்டப்பட்ட பக்கம் CB ஐ G இலும் பக்கம் CA ஐ E இலும் பக்கம் AB ஐ F இலும் வெளிபுறமாகத் தொட்டுச் செல்லும் வட்டத்தை வரைக.

ලඝුගණක
மடக்கைகள்
LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ලඝුගණක
மடக்கைகள்
LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	මධ්‍යක අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
0	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320	.0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0436	.0465	.0494	.0523	87	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	.0523	.0552	.0581	.0610	.0640	.0669	.0698	86	3	6	9	12	15	17	20	23	26
4	.0698	.0727	.0756	.0785	.0814	.0843	.0872	85	3	6	9	12	15	17	20	23	26
5	0.0872	0.0901	0.0929	0.0958	0.0987	0.1016	0.1045	84	3	6	9	12	14	17	20	23	26
6	.1045	.1074	.1103	.1132	.1161	.1190	.1219	83	3	6	9	12	14	17	20	23	26
7	.1219	.1248	.1276	.1305	.334	.1363	.1392	82	3	6	9	12	14	17	20	23	26
8	.1392	.1421	.1449	.1478	.1507	.1536	.1564	81	3	6	9	11	14	17	20	23	26
9	.1564	.1593	.1622	.1650	.1679	.1708	.1736	80°	3	6	9	11	14	17	20	23	26
10°	0.1736	0.1765	0.1794	0.1822	0.1851	0.1880	0.1908	79	3	6	9	11	14	17	20	23	26
11	.1908	.1937	.1965	.1994	.2022	.2051	.2079	78	3	6	9	11	14	17	20	23	26
12	.2079	.2108	.2136	.2164	.2193	.2221	.2250	77	3	6	9	11	14	17	20	23	26
13	.2250	.2278	.2306	.2334	.2363	.2391	.2419	76	3	6	8	11	14	17	20	23	25
14	.2419	.2447	.2476	.2504	.2532	.2560	.2588	75	3	6	8	11	14	17	20	23	25
15	0.2588	0.2616	0.2644	0.2672	0.2700	0.2728	0.2756	74	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	.2756	.2784	.2812	.2840	.2868	.2896	.2924	73	3	6	8	11	14	17	20	22	25
17	.2924	.2952	.2979	.3007	.3035	.3062	.3090	72	3	6	8	11	14	17	19	22	25
18	.3090	.3118	.3145	.3173	.3201	.3228	.3256	71	3	6	8	11	14	17	19	22	25
19	.3256	.3283	.3311	.3338	.3365	.3393	.3420	70	3	5	8	11	14	16	19	22	25
20°	0.3420	0.3448	0.3475	0.3502	0.3529	0.3557	0.3584	69	3	5	8	11	14	16	19	22	25
21	.3584	.3611	.3638	.3665	.3692	.3719	.3746	68	3	5	8	11	14	16	19	22	24
22	.3746	.3773	.3800	.3827	.3854	.3881	.3907	67	3	5	8	11	13	16	19	21	24
23	.3907	.3934	.3961	.3987	.4014	.4041	.4067	66	3	5	8	11	13	16	19	21	24
24	.4067	.4094	.4120	.4147	.4173	.4200	.4226	65	3	5	8	11	13	16	19	21	24
25	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358	0.4384	64	3	5	8	10	13	16	18	21	24
26	.4348	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	.4540	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669	.4695	62	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823	.4848	61	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975	.5000	60°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
30°	0.5000	0.5025	0.5050	0.5075	0.5100	0.5125	0.5150	59	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	.5150	.5175	.5200	.5225	.5250	.5275	.5299	58	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	.5299	.5324	.5348	.5373	.5398	.5422	.5446	57	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	.5446	.5471	.5495	.5519	.5544	.5568	.5592	56	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	.5592	.5616	.5640	.5664	.5688	.5712	.5736	55	2	5	7	10	12	14	17	19	22
35	0.5736	0.5760	0.5783	0.5807	0.5831	0.5854	0.5878	54	2	5	7	9	12	14	17	19	21
36	.5878	.5901	.5925	.5948	.5972	.5995	.6018	53	2	5	7	9	12	14	16	19	21
37	.6018	.6041	.6065	.6088	.6111	.6134	.6157	52	2	5	7	9	12	14	16	18	21
38	.6157	.6180	.6202	.6225	.6248	.6271	.6293	51	2	5	7	9	11	14	16	18	20
39	.6293	.6316	.6338	.6361	.6383	.6406	.6428	50°	2	4	7	9	11	13	16	18	20
40°	0.6428	0.6450	0.6472	0.6494	0.6517	0.6539	0.6561	49	2	4	7	9	11	13	15	18	20
41	.6561	.6583	.6604	.6626	.6648	.6670	.6691	48	2	4	7	9	11	13	15	17	20
42	.6691	.6713	.6734	.6756	.6777	.6799	.6820	47	2	4	6	9	11	13	15	17	19
43	.6820	.6841	.6862	.6848	.6905	.6926	.6947	46	2	4	6	8	11	13	15	17	19
44	.6947	.6967	.6988	.7009	.7030	.7050	.7071	45	2	4	6	8	10	12	15	17	19
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

ප්‍රකෘති සයින

இயற்கைச் சைன்கள்

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	0.7071	0.7092	0.7112	0.7133	0.7153	0.7173	0.7193	44°	2	4	6	8	10	12	14	16	18
46	.7193	.7214	.7234	.7254	.7274	.7294	.7314	43	2	4	6	8	10	12	14	16	18
47	.7314	.7333	.7353	.7373	.7392	.7412	.7431	42	2	4	6	8	10	12	14	16	18
48	.7431	.7451	.7470	.7490	.7509	.7528	.7547	41	2	4	6	8	10	12	13	15	17
49	.7547	.7566	.7585	.7604	.7623	.7642	.7660	40°	2	4	6	8	9	11	13	15	17
50°	0.7660	0.7679	0.7698	0.7716	0.7735	0.7753	0.7771	39	2	4	6	7	9	11	13	15	17
51	.7771	.7790	.7808	.7826	.7844	.7862	.7880	38	2	4	5	7	9	11	13	14	16
52	.7880	.7898	.7916	.7934	.7951	.7969	.7986	37	2	4	5	7	9	11	12	14	16
53	.7986	.8004	.8021	.8039	.8056	.8073	.8090	36	2	3	5	7	9	10	12	14	16
54	.8090	.8107	.8124	.8141	.8158	.8175	.8192	35	2	3	5	7	8	10	12	14	15
55	0.8192	0.8208	0.8225	0.8241	0.8258	0.8274	0.8290	34	2	3	5	7	8	10	12	13	15
56	.8290	.8307	.8323	.8339	.8355	.8371	.8387	33	2	3	5	6	8	10	11	13	14
57	.8387	.8403	.8418	.8434	.8450	.8465	.8480	32	2	3	5	6	8	9	11	13	14
58	.8480	.8496	.8511	.8526	.8542	.8557	.8572	31	2	3	5	6	8	9	11	12	14
59	.8572	.8587	.8601	.8616	.8631	.8646	.8660	30°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
60°	0.8660	0.8675	0.8689	0.8704	0.8718	0.8732	0.8746	29	1	3	4	6	7	9	10	11	13
61	.8746	.8760	.8774	.8788	.8802	.8816	.8829	28	1	3	4	6	7	8	10	11	12
62	.8829	.8843	.8857	.8870	.8884	.8897	.8910	27	1	3	4	5	7	8	9	11	12
63	.8910	.8923	.8936	.8949	.8962	.8975	.8988	26	1	3	4	5	6	8	9	10	12
64	.8988	.9001	.9013	.9026	.9038	.9051	.9063	25	1	3	4	5	6	8	9	10	11
65	0.9063	0.9075	0.9088	0.9100	0.9112	0.9124	0.9135	24	1	2	4	5	6	7	8	10	11
66	.9135	.9147	.9159	.9171	.9182	.9194	.9205	23	1	2	3	5	6	7	8	9	10
67	.9205	.9216	.9228	.9239	.9250	.9261	.9272	22	1	2	3	4	6	7	8	9	10
68	.9272	.9283	.9293	.9304	.9315	.9325	.9336	21	1	2	3	4	5	6	7	9	10
69	.9336	.9346	.9356	.9367	.9377	.9387	.9397	20	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70°	0.9397	0.9407	0.9417	0.9426	0.9436	0.9446	0.9455	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	.9455	.9465	.9474	.9483	.9492	.9502	.9511	18	1	2	3	4	5	6	6	7	8
72	.9511	.9520	.9528	.9537	.9546	.9555	.9563	17	1	2	3	4	4	5	6	7	8
73	.9563	.9572	.9580	.9588	.9596	.9605	.9613	16	1	2	2	3	4	5	6	7	7
74	.9613	.9621	.9628	.9636	.9644	.9652	.9659	15	1	2	2	3	4	5	5	6	7
75	0.9659	0.9667	0.9674	0.9681	0.9689	0.9696	0.9703	14	1	1	2	3	4	4	5	6	7
76	.9703	.9710	.9717	.9724	.9730	.9737	.9744	13	1	1	2	3	3	4	5	5	6
77	.9744	.9750	.9757	.9763	.9769	.9775	.9781	12	1	1	2	3	3	4	4	5	6
78	.9781	.9787	.9793	.9799	.9805	.9811	.9816	11	1	1	2	2	3	3	4	5	5
79	.9816	.9822	.9827	.9833	.9838	.9843	.9848	10°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80°	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872	0.9877	9	0	1	1	2	2	3	3	4	4
81	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	8	0	1	1	2	2	3	3	3	4
82	.9903	.9907	.9911	.9914	.9918	.9922	.9925	7	0	1	1	2	2	2	3	3	3
83	.9925	.9929	.9932	.9936	.9939	.9942	.9945	6	0	1	1	1	2	2	2	3	3
84	.9945	.9948	.9951	.9954	.9957	.9959	.9962	5	0	1	1	1	1	2	2	2	3
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974	0.9976	4									
86	.9976	.9978	.9980	.9981	.9983	.9985	.9986	3									
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993	.9994	2									
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998	.9998	1									
89	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින

இயற்கைக் கோசைன்கள்

NATURAL COSINES

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்கன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යක අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89°	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320	.0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0437	.0466	.0495	.0524	87	3	6	9	12	15	18	20	23	26
3	.0524	.0553	.0582	.0612	.0641	.0670	.0699	86	3	6	9	12	15	18	20	23	26
4	.0699	.0729	.0758	.0787	.0816	.0846	.0875	85	3	6	9	12	15	18	21	23	26
5	0.0875	0.0904	0.0934	0.0963	0.0992	0.1022	0.1051	84	3	6	9	12	15	18	21	24	26
6	.1051	.1080	.1110	.1139	.1169	.1198	.1228	83	3	6	9	12	15	18	21	24	27
7	.1228	.1257	.1287	.1317	.1346	.1376	.1405	82	3	6	9	12	15	18	21	24	27
8	.1405	.1435	.1465	.1495	.1524	.1554	.1584	81	3	6	9	12	15	18	21	24	27
9	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1733	.1763	80°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
10°	0.1763	0.1793	0.1823	0.1853	0.1883	0.1914	0.1944	79	3	6	9	12	15	18	21	24	27
11	.1944	.1974	.2004	.2035	.2065	0.2095	0.2126	78	3	6	9	12	15	18	21	24	27
12	.2126	.2156	.2186	.2217	.2247	.2278	.2309	77	3	6	9	12	15	18	21	24	27
13	.2309	.2339	.2370	.2401	.2432	.2462	.2493	76	3	6	9	12	15	18	22	25	28
14	.2493	.2524	.2555	.2586	.2617	.2648	.2679	75	3	6	9	12	16	19	22	25	28
15	0.2679	0.2711	0.2742	0.2773	0.2805	0.2836	0.2867	74	3	6	9	13	16	19	22	25	28
16	.2867	.2899	.2931	.2962	.2994	.3026	.3057	73	3	6	9	13	16	19	22	25	28
17	.3057	.3089	.3121	.3153	.3185	.3217	.3249	72	3	6	10	13	16	19	22	26	29
18	.3249	.3281	.3314	.3346	.3378	.3411	.3443	71	3	6	10	13	16	19	23	26	29
19	.3443	.3476	.3508	.3541	.3574	.3607	.3640	70°	3	7	10	13	16	20	23	26	29
20°	0.3640	0.3673	0.3706	0.3739	0.3772	0.3805	0.3839	69	3	7	10	13	17	20	23	27	30
21	.3839	.3872	.3906	.3939	.3973	.4006	.4040	68	3	7	10	13	17	20	24	27	30
22	.4040	.4074	.4108	.4142	.4176	.4210	.4245	67	3	7	10	14	17	20	24	27	31
23	.4245	.4279	.4314	.4348	.4383	.4417	.4452	66	3	7	10	14	17	21	24	28	31
24	.4452	.4487	.4522	.4557	.4592	.4628	.4663	65	4	7	11	14	18	21	25	28	32
25	0.4663	0.4699	0.4734	0.4770	0.4806	0.4841	0.4877	64	4	7	11	14	18	21	25	29	32
26	.4877	.4913	.4950	.4986	.5022	.5059	.5095	63	4	7	11	15	18	22	25	29	33
27	.5095	.5132	.5169	.5206	.5243	.5280	.5317	62	4	7	11	15	18	22	26	30	33
28	.5317	.5354	.5392	.5430	.5467	.5505	.5543	61	4	8	11	15	19	23	26	30	34
29	.5543	.5581	.5619	.5658	.5696	.5735	.5774	60°	4	8	12	15	19	23	27	31	35
30°	0.5774	0.5812	0.5851	0.5890	0.5930	0.5969	0.6009	59	4	8	12	16	20	24	27	31	35
31	.6009	.6048	.6088	.6128	.6168	.6208	.6249	58	4	8	12	16	20	24	28	32	36
32	.6249	.6289	.6330	.6371	.6412	.6453	.6494	57	4	8	12	16	20	25	29	33	37
33	.6494	.6536	.6577	.6619	.6661	.6703	.6745	56	4	8	13	17	21	25	29	33	38
34	.6745	.6787	.6830	.6873	.6916	.6959	.7002	55	4	9	13	17	21	26	30	34	39
35	0.7002	0.7046	0.7089	0.7133	0.7177	0.7221	0.7265	54	4	9	13	18	22	26	31	35	40
36	.7265	.7310	.7355	.7400	.7445	.7490	.7536	53	5	9	14	18	23	27	32	36	41
37	.7536	.7581	.7627	.7673	.7720	.7766	.7813	52	5	9	14	19	23	28	32	37	42
38	.7813	.7860	.7907	.7954	.8002	.8050	.8098	51	5	10	14	19	24	29	33	38	43
39	.8098	.8146	.8195	.8243	.8292	.8342	.8391	50°	5	10	15	20	24	29	34	39	44
40°	0.8391	0.8441	0.8491	0.8541	0.8591	0.8642	0.8693	49	5	10	15	20	25	30	35	40	45
41	.8693	.8744	.8796	.8847	.8899	.8952	.9004	48	5	10	16	21	26	31	36	41	47
42	.9004	.9057	.9110	.9163	.9217	.9271	.9325	47	5	11	16	21	27	32	37	43	48
43	.9325	.9380	.9435	.9490	.9545	.9601	.9657	46	6	11	17	22	28	33	39	44	50
44	.9657	.9731	.9770	.9827	.9884	.9942	1.0000	45	6	11	17	23	29	34	40	46	51
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝටැංජන
இயற்கைக் கோதான்சன்கள்
NATURAL COTANGENTS

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்சன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
								මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences									
45°	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0235	1.0295	1.0355	44°	6	12	18	24	30	36	41	47	53
46	.0355	.0416	.0477	.0538	.0599	.0661	.0724	43	6	12	18	25	31	37	43	49	55
47	.0724	.0786	.0850	.0913	.0977	.1041	.1106	42	6	13	19	26	32	38	45	51	57
48	.1106	.1171	.1237	.1303	.1369	.1436	.1504	41	7	13	20	27	33	40	46	53	60
49	.1504	.1571	.1640	.1708	.1778	.1847	.1918	40°	7	14	21	28	34	41	48	55	62
50°	1.1918	1.1988	1.2059	1.2131	1.2203	1.2276	1.2349	39	7	14	22	29	36	43	50	58	65
51	.2349	.2423	.2497	.2572	.2647	.2723	.2799	38	8	15	23	30	38	45	53	60	68
52	.2799	.2876	.2954	.3032	.3111	.3190	.3270	37	8	16	24	31	39	47	55	63	71
53	.3270	.3351	.3432	.3514	.3597	.3680	.3764	36	8	16	25	33	41	49	58	66	74
54	.3764	.3848	.3934	.4019	.4106	.4193	.4281	35	9	17	26	35	43	52	60	69	78
55	1.4281	1.4370	1.4460	1.4550	1.4641	1.4733	1.4826	34	9	18	27	36	45	54	63	73	82
56	.4826	.4919	.5013	.5108	.5204	.5301	.5399	33	10	19	29	38	48	57	67	76	86
57	.5399	.5497	.5597	.5697	.5798	.5900	.6003	32	10	20	30	40	50	60	71	81	91
58	.6003	.6107	.6212	.6319	.6426	.6534	.6643	31	11	21	32	43	53	64	75	85	96
59	.6643	.6753	.6864	.6977	.7090	.7205	.7321	30°	11	23	34	45	56	68	79	90	102
60°	1.732	1.744	1.756	1.767	1.780	1.792	1.804	29	1	2	4	5	6	7	8	10	11
61	1.804	1.816	1.829	1.842	1.855	1.868	1.881	28	1	3	4	5	6	8	9	10	12
62	1.881	1.894	1.907	1.921	1.935	1.949	1.963	27	1	3	4	5	7	8	10	11	12
63	1.963	1.977	1.991	2.006	2.020	2.035	2.050	26	1	3	4	6	7	9	10	12	13
64	2.050	2.066	2.081	2.097	2.112	2.128	2.145	25	2	3	5	6	8	9	11	13	14
65	2.145	2.161	2.177	2.194	2.211	2.229	2.246	24	2	3	5	7	8	10	12	14	15
66	2.246	2.264	2.282	2.300	2.318	2.337	2.356	23	2	4	5	7	9	11	13	15	16
67	2.356	2.375	2.394	2.414	2.434	2.455	2.475	22	2	4	6	8	10	12	14	16	18
68	2.475	2.496	2.517	2.539	2.560	2.583	2.605	21	2	4	6	9	11	13	15	17	20
69	2.605	2.628	2.651	2.675	2.699	2.723	2.747	20°	2	5	7	9	12	14	17	19	21
70°	2.747	2.773	2.798	2.824	2.850	2.877	2.904	19	3	5	8	10	13	16	18	21	23
71	2.904	2.932	2.960	2.989	3.018	3.047	3.078	18	3	6	9	12	14	17	20	23	26
72	3.078	3.108	3.140	3.172	3.204	3.237	3.271	17	3	6	10	13	16	19	23	26	29
73	3.271	3.305	3.340	3.376	3.412	3.450	3.487	16	4	7	11	14	18	22	25	29	32
74	3.487	3.526	3.566	3.606	3.647	3.689	3.732	15	4	8	12	16	20	24	29	33	37
75	3.732	3.776	3.821	3.867	3.914	3.962	4.011	14	5	9	14	19	23	28	33	37	42
76	4.011	4.061	4.113	4.165	4.219	4.275	4.331	13	5	11	16	21	27	32	37	43	48
77	4.331	4.390	4.449	4.511	4.574	4.638	4.705	12	6	12	19	25	31	37	44	50	56
78	4.705	4.773	4.843	4.915	4.989	5.066	5.145	11	7	15	22	29	37	44	51	59	66
79	5.145	5.226	5.309	5.396	5.485	5.576	5.671	10°	9	18	26	35	44	53	61	70	79
80°	5.671	5.769	5.871	5.976	6.084	6.197	6.314	9									
81	6.314	6.435	6.561	6.691	6.827	6.968	7.115	8									
82	7.115	7.269	7.429	7.596	7.770	7.953	8.144	7									
83	8.144	8.345	8.556	8.777	9.010	9.255	9.514	6									
84	9.514	9.788	10.078	10.385	10.712	11.059	11.430	5	வித்தியாசங்கள் விரைந்து மாறுவன								
85	11.43	11.83	12.25	12.71	13.20	13.73	14.30	4									
86	14.30	14.92	15.60	16.35	17.17	18.07	19.08	3									
87	19.08	20.21	21.47	22.90	24.54	26.43	28.64	2									
88	28.64	31.24	34.37	38.19	42.96	49.10	57.29	1									
89	57.29	68.75	85.94	114.59	171.89	343.77	∞	0°									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝටැංජන
இயற்கைக் கோதான்சன்கள்
NATURAL COTANGENTS